9. SINIF MATEMATİK · 1. DÖNEM 1. YAZILI · 90+ SÜRÜMÜ · VARYASYON A

Sayılarla Antrenman: Üsten Köke, Aralıktan Doğruya

Bu not, 1. yazılının bütün konularını adım adım çalıştırmak için hazırlandı. Her bölümde kısa ve net bir anlatım, şekiller, **Derinleşelim** kutuları ve **Kolay / Orta / Zor** diye kademelenmiş çözümlü örnekler var. Konuları bitirince **90+ Atölyesi**'nde kazanımları birlikte kullanırsın; en sonda da puanlamalı iki deneme seni bekliyor: **Prova 1 – Temel** ve **Prova 2 – 90+ Zorluk**.

Sınav bilgisi ve kapsam

Takvimde matematik yazılısı **5 Kasım 2026** tarihinde ve **40 dakika** olarak görünüyor. Soruların hepsi açık uçlu. Tarihi okulundan mutlaka teyit et.

Kod	Konu	Soru sayısı*
9.1.1	Gerçek sayıların üslü ve köklü gösterimleriyle işlemler	2–3
9.1.2	Gerçek sayı aralıkları ve küme sembolleri	1–2
9.1.3	Sayı kümeleri ve işlem özellikleri	1
9.1.4	İşlem özelliklerini cebirsel olarak ifade etme	1–2
9.2.1	Doğrusal fonksiyonlar ve nitel özellikleri	0–2

*MEB tablosunda 4 senaryo bulunuyor; okulundaki zümre bunlardan birini seçiyor. Doğrusal fonksiyon sorusu yalnızca **Senaryo 2 ve 3**'te yer alıyor. **Hangi senaryonun seçildiğini öğretmenine sor**; emin olamıyorsan hepsine çalış.

Tam puan için cevap yazma

Açık uçlu sorular **puanlama anahtarına** göre okunur. Öğretmen her adıma ayrı puan verir; yalnızca sonucu yazan öğrenci, sonucu doğru olsa bile puanın bir bölümünü bırakır.

Adım	Öğretmenin baktığı şey
Veri	Verilenleri doğru okuyup yazdın mı? (ör. "$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3}$")
İşlem	Hangi kuralı kullandığını ve ara adımları gösterdin mi?
Sonuç	Sonuç en sade hâlinde mi? ($4\sqrt{3}$, sadeleşmiş kesir, doğru parantezli aralık)
Gösterim	Küme ve aralık sembolleri, sayı doğrusu, grafik doğru mu?
Birim	Gerçek yaşam sorusunda sonucun yanına m, m², TL, kg, saniye gibi birimi yazdın mı?
Gerekçe	"Neden?", "Gösteriniz" ya da "Açıklayınız" geçiyorsa bir cümlelik gerekçe ya da karşı örnek yazdın mı?

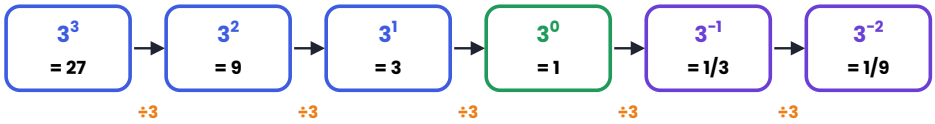
ZAYIF · 2/10
Soru: Tam sayılar kümesi bölme işlemine göre kapalı mıdır?
Cevap: "Kapalı değil."

TAM · 10/10
Cevap: "Kapalı değildir. 3 ve 4 tam sayıdır, fakat 3 ÷ 4 = 0,75 bir tam sayı değildir. Kapalılığın bozulduğunu göstermek için bu tek karşı örnek yeterlidir."

1. Üslü Gösterim

9.1.1 · Tam sayı üsler ve kurallar

a^n, a sayısının kendisiyle n kez çarpılmasıdır: $3^4 = 3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3 = 81$. Sıfır ve negatif üsleri ezberlemek yerine bir merdiven gibi düşün: Üs bir basamak aşağı indikçe sayı tabana **bölünür**. 3'ün kuvvetlerinde her adımda 3'e bölündüğünü aşağıda görebilirsin.



Şekil 1. Üs 1 azaldığında değer 3'e bölünür. Bu yüzden $3^0 = 1$, $3^{-1} = 1/3$ ve $3^{-2} = 1/9$ olur.

Kural (a, b ≠ 0)	Örnek
$a^0 = 1$	$(-3)^0 = 1$
$a^{-n} = 1 / a^n$	$2^{-3} = 1/8$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^4 \cdot 3^{-2} = 3^2$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$7^3 \div 7^5 = 7^{-2}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(5^2)^3 = 5^6$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$2^3 \cdot 5^3 = 10^3$
$(a/b)^{-n} = (b/a)^n$	$(3/4)^{-2} = 16/9$

± İşaret kuralı

Negatif bir taban **çift** kuvvette pozitif, **tek** kuvvette negatif sonuç verir.

$(-3)^2 = 9 \cdot (-3)^3 = -27 \cdot -3^2 = -(3^2) = -9$

Parantez yoksa üs yalnızca 3'e aittir; baştaki eksi işareti üssün dışında kalır.

KOLAY **Örnek 1. $(9^2 \cdot 27) \div 3^5$ işleminin sonucunu bulalım.**

Hepsini 3 tabanına çevir: $9 = 3^2$, $27 = 3^3$.
$(3^2)^2 \cdot 3^3 \div 3^5 = 3^4 \cdot 3^3 \div 3^5 = 3^{4+3-5} = 3^2 = \mathbf{9}$

KOLAY **Örnek 2. $2^{-1} + 2^{-3}$ toplamını bulalım.**

$2^{-1} = 1/2 = 4/8$ ve $2^{-3} = 1/8$. Toplam: $4/8 + 1/8 = \mathbf{5/8}$. Toplamada üslerle bir işlem yapılmaz; önce her terimin değerini bul.

Taktik: Soruda 9, 27, 81, 1/3, 1/9 gibi sayılar görürsen hepsini 3'ün kuvveti olarak yaz ($81 = 3^4$, $1/9 = 3^{-2}$). Aynı tabana geçtikten sonra iş, üslerde toplama-çıkarmaya döner.

Sık yapılan hata

Aynı tabanlı sayıları çarparken tabanları da çarpmak: $3^2 \cdot 3^3 = 9^5$ **yanlış**. Taban aynı kalır, sadece üsler toplanır: $3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 243$.

Derinleşelim: Kurallar nereden geliyor?

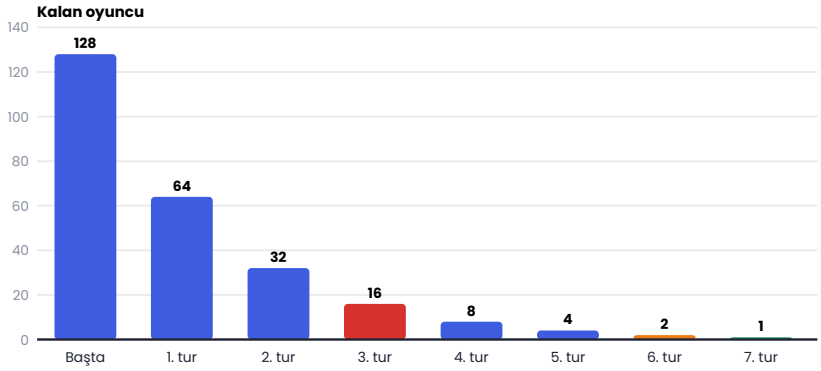
- **$a^{-n} = 1/a^n$ neden?** $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$ olmalı. Çarpımı 1 olan iki sayı birbirinin tersidir; demek ki a^{-n}, a^n'nin tersidir. 0^0 ve 0^{-1} tanımsızdır.
- **Karşılaştırmanın iki yolu:** Tabanları eşitle ($8^5 = 2^{15}$, $4^7 = 2^{14}$) ya da üsleri eşitle ($2^{45} = 8^{15}$, $3^{30} = 9^{15}$). Taban 1'den büyükken taban aynıysa üssü büyük olan, üs aynıysa tabanı büyük olan büyüktür.
- **Ortak çarpan:** $3^{x+2} + 3^{x+1}$ gibi toplamlarda en küçük kuvveti dışarı al: $3^x \cdot (3^2 + 3^1) = 12 \cdot 3^x$.
- **Üslü denklem:** $a > 0$ ve $a \neq 1$ iken $a^m = a^n$ ise $m = n$'dir. Tabanları eşitlemek, denklemi üsler arasındaki basit bir denkleme çevirir.

ORTA **Örnek 3. $a = 8^5$, $b = 4^7$, $c = 16^4$ sayılarını küçükten büyüğe sıralayalım.**

Hepsini 2 tabanında yaz: $a = (2^3)^5 = 2^{15}$, $b = (2^2)^7 = 2^{14}$, $c = (2^4)^4 = 2^{16}$. Tabanlar aynı, üsleri karşılaştır: $14 < 15 < 16 \Rightarrow$ **$b < a < c$**.

ZOR **Örnek 4 (Ortak çarpan). $3^{x+1} + 3^{x-1} = 90$ ise x kaçtır?**

En küçük kuvvet 3^{x-1}; onu dışarı al: $3^{x-1} \cdot (3^2 + 1) = 90 \Rightarrow 10 \cdot 3^{x-1} = 90 \Rightarrow 3^{x-1} = 9 = 3^2 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow$ **$x = 3$**.
Kontrol: $3^4 + 3^2 = 81 + 9 = 90$ ✓



Şekil 2. Eleme usulü turnuvada her tur oyuncu sayısını yarıya indirir: $2^7, 2^6, \ldots, 2^0$. Her turda üs 1 azalır; 3. turdan sonra $2^4 = 16$ oyuncu kalır.

ZOR **Örnek 5 (Gerçek yaşam). Okul satranç turnuvası 2^7 öğrenciyle başlıyor. Eleme usulüyle oynanıyor: Her turda oyuncular eşleşiyor, kaybeden elenir. a) 3. tur bittiğinde kaç oyuncu kalır? b) Kaçıncı turun sonunda finale kalan 2 oyuncu belli olur? c) Şampiyon toplam kaç maç oynar?**

Her tur oyuncu sayısını 2'ye böler, yani üssü 1 azaltır. n tur sonra kalan: $2^7 \cdot 2^{-n} = 2^{7-n}$.
a) $2^{7-3} = 2^4 =$ **16 oyuncu**.
b) $2^{7-n} = 2 = 2^1 \Rightarrow 7 - n = 1 \Rightarrow$ **6. tur**.
c) Şampiyon 2^7'den $2^0 = 1$'e inene kadar her turda oynar: **7 maç**.

Tuzak

- 3^{-2}'yi negatif sanmak: $3^{-2} = 1/9 > 0$. Negatif üs sayıyı ters çevirir, işaretini değiştirmez.
- Kuvvetin kuvveti ile çarpımı karıştırmak: $(2^3)^2 = 2^6$ (üsler çarpılır), ama $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$ (üsler toplanır).
- $(-2)^4$ ile -2^4'ü aynı sanmak: ilki 16, ikincisi -16.

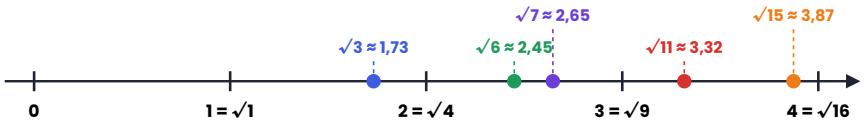
2. Köklü Gösterim ve Rasyonel Üs

9.1.1 · Kök kuralları, kök dışına çıkarma, paydayı rasyonel yapma

$\sqrt{a}$ ($a \geq 0$), karesi a olan negatif olmayan sayıdır. Kök almak ile kesirli üs kullanmak aynı işin iki farklı yazılışıdır:

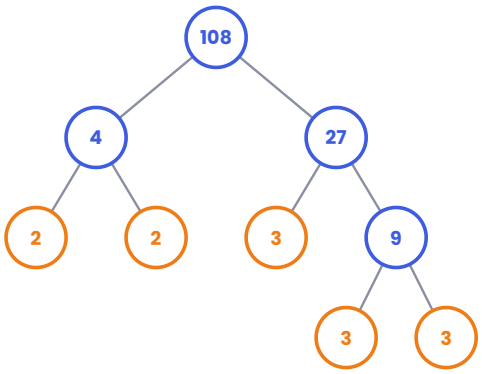
$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ örnek: $32^{3/5} = (\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8$

Kesrin **paydası** kökün derecesini, **payı** kuvveti gösterir. Tek dereceli kök negatif sayılarda da tanımlıdır: $\sqrt[3]{-8} = -2$. Çift dereceli kökün içi ise negatif olamaz. Bir de şunu unutma: $\sqrt{a^2} = |a|$, örneğin $\sqrt{(-7)^2} = 7$.



Şekil 3. Tam kare olmayan bir sayının kökü, iki komşu tam karenin kökleri arasında kalır: $9 < 11 < 16$ olduğundan $3 < \sqrt{11} < 4$.

Kural ($a, b \geq 0$)	Örnek
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$
$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a/b}$ ($b \neq 0$)	$\sqrt{48} \div \sqrt{3} = \sqrt{16} = 4$
Yalnızca benzer kökler toplanır ve çıkarılır	$4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
Katsayıyı köke alma: katsayının karesi girer	$2\sqrt{7} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{28}$



Şekil 4. 108'in asal çarpan ağacı: Turuncu daireler asal çarpanlardır.

$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$= (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot 3$

$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3$

$\sqrt{108} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

Her eş çift, kökün dışına tek bir çarpan olarak çıkar; eşi olmayan 3 içeride kalır.

KOLAY **Örnek 6. $\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{12}$ işlemini yapalım.**

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$, $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$, $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
Hepsi $\sqrt{3}$'ün katı oldu: $5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \mathbf{4\sqrt{3}}$

ORTA **Örnek 7 (Paydayı rasyonel yapma). a) $10 / \sqrt{5}$ b) $4 / (\sqrt{7} + \sqrt{3})$**

a) Pay ve paydayı $\sqrt{5}$ ile genişlet: $10\sqrt{5} / 5 = \mathbf{2\sqrt{5}}$.
b) Paydanın eşleniği $(\sqrt{7} - \sqrt{3})$. Paydada $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \Rightarrow 7 - 3 = 4$.
$4(\sqrt{7} - \sqrt{3}) / 4 = \mathbf{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

KOLAY **Örnek 8. $16^{-3/4}$ kaçtır?**

$16^{-3/4} = 1 / 16^{3/4} = 1 / (\sqrt[4]{16})^3 = 1 / 2^3 =$ **1/8**

Taktik: Kök dışına çıkarırken kökün içindeki sayının **en büyük tam kare** çarpanını ara: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. √108 için 36'yı görürsen tek adımda 6√3 yazarsın; 4 ile başlarsan önce 2√27, sonra yeniden 6√3 diye iki kez uğraşırsın.

Sık yapılan hata

Katsayıyı kök içine alırken karesini almamak: 3√2 = √6 **yanlış**. Katsayı köke karesiyle girer: 3√2 = √(9·2) = √18. Kontrol: 3√2 ≈ 4,24; √6 ≈ 2,45.

Derinleşelim: Mutlak değer, karşılaştırma ve eşlenik

- **$\sqrt{a^2} = |a|$** kuralı kökün içindeki ifadenin işaretini sorar. √5 ≈ 2,24 olduğundan √5 − 3 < 0'dır; bu yüzden $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-3| = 3-\sqrt{5}$.
- **Köklü sayıları karşılaştırma:** Katsayıları köke al, kök içlerine bak: $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, $2\sqrt{7} = \sqrt{28} \Rightarrow 2\sqrt{7}$ daha büyük. Dereceler farklıysa ortak dereceye geç: $\sqrt[3]{5} = 5^{2/6} = \sqrt[6]{25}$, $\sqrt{3} = 3^{3/6} = \sqrt[6]{27} \Rightarrow \sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$.
- **Eşlenik neden işe yarar?** $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$. Kökler karelendiği için paydada kök kalmaz. Paydada tek bir √a varsa eşlenik gerekmez; √a ile genişletmek yeter.

ORTA **Örnek 9. a = 3√3, b = 2√7, c = √26 sayılarını sıralayalım.**

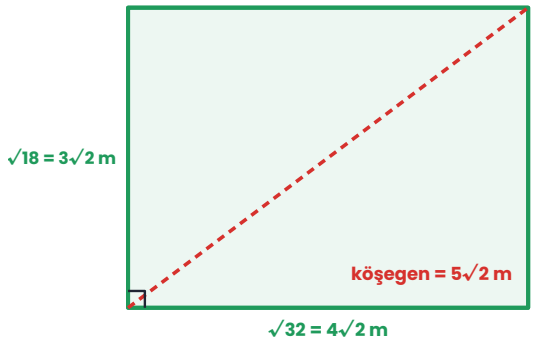
Katsayıları köke al: a = √27, b = √28, c = √26. Kök içleri: 26 < 27 < 28 ⇒ **c < a < b**.

ZOR **Örnek 10 (Mutlak değer tuzağı). $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$ ifadesinin değerini bulalım.**

√5 ≈ 2,24. √5 − 3 < 0 ⇒ |√5 − 3| = 3 − √5. 1 − √5 < 0 ⇒ |1 − √5| = √5 − 1.
Fark: (3 − √5) − (√5 − 1) = 3 − √5 − √5 + 1 = **4 − 2√5**. (İkinci parantezin önündeki eksiyi dağıtmayı unutma.)

ZOR **Örnek 11 (Eşlenikle sadeleştirme). (2√3 + 3) / (2√3 − 3) ifadesini a + b√c biçiminde yazalım.**

Pay ve paydayı (2√3 + 3) ile genişlet. Payda: $(2\sqrt{3})^2 - 3^2 = 12 - 9 = 3$.
Pay: $(2\sqrt{3}+3)^2 = 12 + 2\cdot2\sqrt{3}\cdot3 + 9 = 21 + 12\sqrt{3}$.
Sonuç: $(21 + 12\sqrt{3}) / 3 =$ **7 + 4√3**



Şekil 5. Kenarlar 3√2 ve 4√2 (oran 3 : 4). Köşegen 5√2 çıkıyor: 3-4-5 üçgeninin √2 katı.

√18 = √(9·2) = 3√2 m
√32 = √(16·2) = 4√2 m
köşegen² = 18 + 32 = 50
köşegen = √50 = 5√2 m
alan = 3√2·4√2 = 12·2 = 24 m²

ZOR **Örnek 12 (Gerçek yaşam). Bir futbol antrenörü, kenarları √18 m ve √32 m olan dikdörtgen bir çalışma alanında oyuncularına köşeden köşeye çapraz sprint yaptırıyor. a) Sprintin uzunluğu kaç metredir? b) Alanın çevresini ve alanını en sade biçimde bul.**

Önce kenarları sadeleştir: √18 = 3√2 m, √32 = 4√2 m.
a) Pisagor: köşegen² = 18 + 32 = 50 ⇒ köşegen = √50 = **5√2 m** (≈ 7,07 m).
b) Çevre = 2(3√2 + 4√2) = **14√2 m**. Alan = 3√2 · 4√2 = 12 · 2 = **24 m²**.

Tuzak

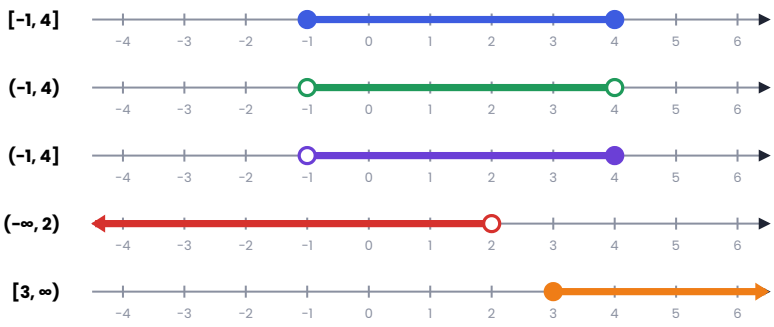
- $\sqrt{x^2} = x$ yazmak. x negatifse yanlıştır: $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$, -6 değil.
- Paydayı rasyonel yaparken eşlenik yerine paydanın kendisiyle çarpmak: 1/(√5 - 1)'i (√5 - 1) ile genişletirsen payda $(\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ olur; kök kaybolmaz. Doğru çarpan (√5 + 1)'dir.
- Yalnızca paydayı çarpmak. Pay da aynı ifadeyle çarpılmalı; yoksa sayının değeri değişir.

3. Gerçek Sayı Aralıkları ve Küme Sembolleri

9.1.2 · Gösterim, sayı doğrusu, birleşim, kesişim, fark

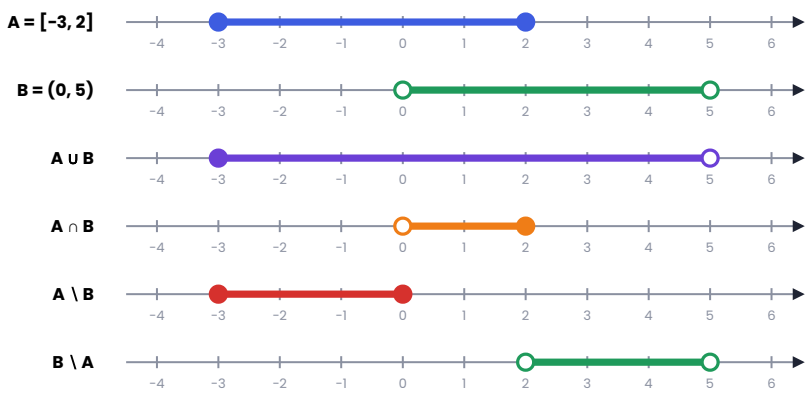
Aralık, sayı doğrusundan kesilmiş bir parçadır; iki uç arasındaki **bütün** gerçek sayıları, yani sonsuz çoklukta sayıyı içerir. Aynı aralığı üç farklı dille anlatabilirsin:

Aralık gösterimi	Küme gösterimi	Sözle
[-1, 4]	$\{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 4\}$	-1 ile 4 arası, iki uç da dahil (kapalı)
(-1, 4)	$\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 4\}$	Uçlar dahil değil (açık)
(-1, 4]	$\{x \in \mathbb{R} : -1 < x \le 4\}$	Yarı açık: yalnızca 4 dahil
(-∞, 2)	$\{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$	2'den küçük bütün gerçek sayılar
[3, ∞)	$\{x \in \mathbb{R} : x \ge 3\}$	3 ve 3'ten büyük bütün gerçek sayılar



Şekil 6. Dolu daire: uç dahil (köşeli parantez). Boş daire: uç dahil değil (normal parantez). Ok, aralığın o yönde sonsuza gittiğini gösterir.

Küme işlemleri: A ∪ B (birleşim) iki kümeden **en az birinde** olan, A ∩ B (kesişim) **ikisinde birden** olan, A \ B (fark) ise **A'da olup B'de olmayan** sayılardan oluşur.



Şekil 7. Aralıkları alt alta çiz, sonra her noktayı yukarıdan aşağı tara: Birleşimde bir çizginin geçmesi yeter, kesişimde ikisi de geçmeli.

ORTA **Örnek 13. A = [-3, 2] ve B = (0, 5) için A ∪ B, A ∩ B, A \ B ve B \ A kümelerini yazalım.**

A ∪ B = **[-3, 5)** · A ∩ B = **(0, 2]** (0, B'de yok; 2 ikisinde de var)
A \ B = **[-3, 0]** (0, B'de olmadığı için A'dan atılmaz, dahil kalır)
B \ A = **(2, 5)** (2, A'da olduğu için atılır)

KOLAY **Örnek 14. {x ∈ ℝ : -4 < x ≤ 1} kümesini aralıkla yaz ve içindeki tam sayıları say.**

(-4, 1] ⇒ tam sayılar: -3, -2, -1, 0, 1 ⇒ **5 tane**. (-4 dahil değil, 1 dahil.)

Taktik: Eşitsizlikten aralığa geçerken sembolü parantezle eşleştir: **≤, ≥ ⇒ [ ]**, **<, > ⇒ ( )**. Sonra kaba bir sayı doğrusu çiz; birleşim, kesişim ya da fark sorusunda her uç noktaya ayrı ayrı "Bu sayı sonuçta var mı?" diye sor.

Sık yapılan hatalar

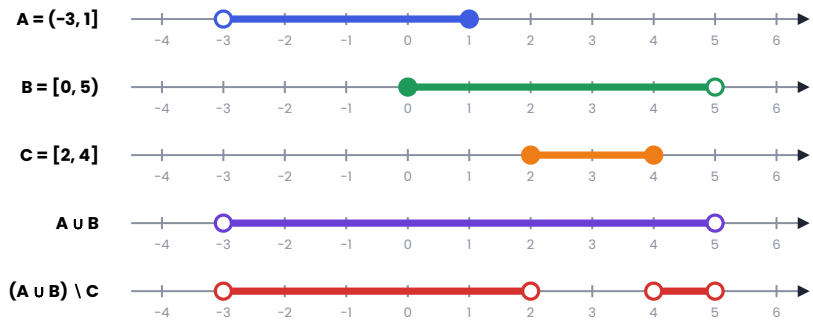
- Sonsuzun yanına köşeli parantez koymak: [3, ∞] yanlış, **[3, ∞)** doğru. ∞ bir sayı değildir, dahil edilemez.
- Aralığı ters yazmak: -5 < x < -1 için (-1, -5) yazılmaz. Küçük uç her zaman solda: **(-5, -1)**.
- "Aralıkta kaç sayı var?" sorusuna tam sayı sayısıyla cevap vermek. (3, 4) aralığında tam sayı yoktur ama sonsuz çoklukta gerçek sayı vardır.

Derinleşelim: Tümleyen, eşitsizlikten aralığa ve iki parçalı sonuçlar

- **Tümleyen:** B = (0, 5) ise B' = ℝ \ B = (-∞, 0] ∪ [5, ∞). B'de dahil olmayan uç tümleyende dahil olur, dahil olan uç dahil olmaz: parantezler ters döner.
- **Eşitsizlikten aralığa:** -7 ≤ 3x - 1 < 8 ⇒ her tarafa 1 ekle: -6 ≤ 3x < 9 ⇒ 3'e böl: -2 ≤ x < 3 ⇒ x ∈ [-2, 3). Negatif sayıya bölerken yön döner: -2x + 1 ≤ 5 ⇒ -2x ≤ 4 ⇒ x ≥ -2.
- **İki parçalı sonuç** ∪ ile yazılır: (-3, 2) ∪ (4, 5). Bunu tek parça (-3, 5) diye yazmak, aradan çıkarılan sayıları geri koymak demektir.
- **Boş küme olabilir:** [1, 2) ∩ [2, 5] = ø, çünkü 2 birinci aralıkta yok.

ORTA **Örnek 15. A = (-∞, 1) ve B = [-4, ∞) için A ∩ B, A ∪ B, B \ A ve A' kümelerini yaz.**

A ∩ B = **[-4, 1)** · A ∪ B = ℝ (her gerçek sayı en az birinde) · B \ A = **[1, ∞)** (1, A'da yok) · A' = **[1, ∞)**



Şekil 8. Önce A ∪ B = (−3, 5) bulunur, sonra C çıkarılır. C'nin uçları 2 ve 4 dahil olduğu için sonuçta bu uçlar boş daire olur.

ZOR **Örnek 16 (Üç küme). A = (-3, 1], B = [0, 5), C = [2, 4] veriliyor. a) (A ∪ B) \ C kümesini yaz ve içindeki tam sayıları say. b) (A ∩ B) ∪ C kümesini yaz.**

a) A ∪ B = (−3, 5). C'yi çıkar: **(-3, 2) ∪ (4, 5)**. Tam sayılar: -2, -1, 0, 1 ⇒ **4 tane**. ((4, 5) aralığında tam sayı yok.)
b) A ∩ B = [0, 1]. C ile birleşince **[0, 1] ∪ [2, 4]**. (1 ile 2 arası boşta kalır; tek aralık değildir.)

ZOR **Örnek 17 (Gerçek yaşam). Bir güreş turnuvasında bir sıklet [55, 60) kg aralığındaki sporcular için açılıyor. Bir sporcunun kilosu sezon boyunca (57, 63] aralığında değişiyor. a) Sporcunun bu sıklette yarışabildiği kiloları aralıkla yaz. b) Sporcunun sıkleti aştığı kilolar hangileridir?**

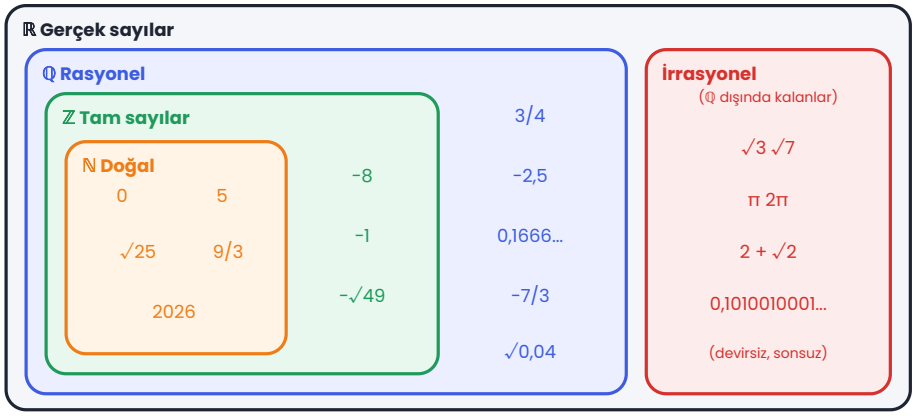
a) Yarışabildiği kilolar: [55, 60) ∩ (57, 63] = **(57, 60) kg**.
b) Sporcunun kiloları içinden sıklete uymayanlar: (57, 63] \ [55, 60) = **[60, 63] kg**. Tam 60 kg'da bile sıklet dışında kalır, çünkü 60 dahil değil.

! Tuzak

- A \ B ile B \ A'yı karıştırmak: Fark işleminin değişme özelliği yoktur.
- Tümleyende parantezleri çevirmeyi unutmak: B = (0, 5) için B' = (−∞, 0] ∪ [5, ∞).
- Gerçek yaşam sorusunda birimi yazmamak: "(57, 60)" değil, "(57, 60) kg".

4. Sayı Kümeleri ve Kapalılık

9.1.3 · Doğal, tam, rasyonel, irrasyonel, gerçek sayılar



Şekil 9. ℕ ⊂ ℤ ⊂ ℚ ⊂ ℝ. Rasyonel ve irrasyonel sayıların ortak elemanı yoktur; ikisi birleşince ℝ'yi tamamlar. (√25 = 5, 9/3 = 3, -√49 = -7, √0,04 = 0,2)

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ doğal sayılar
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ tam sayılar
- $\mathbb{Q}$: a/b biçiminde yazılabilen sayılar (a, b tam sayı, $b \neq 0$). **Biten ve devirli ondalıklar** rasyoneldir.
- **İrrasyonel**: a/b biçiminde yazılamayan, ondalık kısmı devretmeden sonsuza giden sayılar: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, π.
- $\mathbb{R}$: rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşimi.

Kapalılık: Bir kümeden seçtiğin her iki elemanı bir işleme soktuğunda sonuç yine o kümede kalıyorsa, küme o işleme göre kapalıdır.

Küme	+	−	×	÷*
$\mathbb{N}$	Evet	Hayır	Evet	Hayır
$\mathbb{Z}$	Evet	Evet	Evet	Hayır
$\mathbb{Q}$	Evet	Evet	Evet	Evet
İrrasyonel	Hayır	Hayır	Hayır	Hayır
$\mathbb{R}$	Evet	Evet	Evet	Evet

*Bölmede bölen sıfırdan farklı alınır.

KOLAY **Örnek 18. -6, 0, 5/8, $\sqrt{36}$, $\sqrt{10}$, 0,2727..., 2π sayılarını ait oldukları en küçük kümeye yerleştir.**

$\sqrt{36} = 6$ ve $0 \Rightarrow \mathbb{N}$ · $-6 \Rightarrow \mathbb{Z}$ · $5/8$ ve $0{,}2727\ldots = 27/99 = 3/11 \Rightarrow \mathbb{Q}$ · $\sqrt{10}$ ve $2\pi \Rightarrow$ **irrasyonel**

ORTA **Örnek 19 (Devirli ondalığı kesre çevirme). 1,2777... (7 devirli) sayısını kesir olarak yaz.**

Kural: (virgülsüz sayının tamamı - devretmeyen kısım) / (devreden basamak sayısı kadar 9, virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar 0)
$1{,}2\overline{7} = (127 - 12) / 90 = 115/90 =$ **23/18**. Kontrol: $23 \div 18 = 1{,}2777\ldots$ ✓

Taktik: "Kapalı mıdır?" sorusunda **kapalı değil** demek için tek bir karşı örnek yeter. İrrasyoneller için hazır karşı örnekler: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$ ve $(2 + \sqrt{5}) + (2 - \sqrt{5}) = 4$. İki irrasyonelden rasyonel sonuç çıktı.

Sık yapılan hatalar

- Kök işareti gördüğün her sayıyı irrasyonel sanmak: $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ ve $\sqrt[3]{8} = 2$ rasyoneldir.
- Devirli ondalıkları irrasyonel sanmak: $0{,}1212\ldots = 12/99 = 4/33$ rasyoneldir. İrrasyonel olan, **devirsiz** ve sonsuz ondalıktır.

Derinleşelim: Rasyonel + irrasyonel ve yoğunluk

- **Rasyonel + irrasyonel her zaman irrasyoneldir.** Neden? q rasyonel, x irrasyonel olsun ve $q + x = r$ rasyonel çıksın. O zaman $x = r - q$ olur; iki rasyonelin farkı rasyonel olduğundan x de rasyonel çıkar. Bu, x'in irrasyonel olmasıyla çelişir. Aynı akıl yürütmeyle: sıfırdan farklı bir rasyonel ile bir irrasyonelin çarpımı da irrasyoneldir.
- **İki irrasyonelin toplamı ya da çarpımı** önceden kestirilemez: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrasyoneldir, ama $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$ rasyoneldir.
- **Yoğunluk:** Birbirinden farklı iki gerçek sayı arasında her zaman sonsuz çoklukta rasyonel ve irrasyonel sayı bulunur. İki sayı arasından rasyonel bir sayı seçmek için ortalamalarını alabilirsin: $(a + b)/2$.



Şekil 10. 1,73 ile 1,74 arasını büyüttük: Bu kısacık aralıkta bile rasyonel (mavi) ve irrasyonel (kırmızı) sayılar sonsuz çoklukta.

ORTA **Örnek 20. a = 2 + √5 ve b = 2 − √5 için a + b, a·b, a − b ve a/b sayılarının hangi kümeye ait olduğunu bul.**

$a + b = 4 \Rightarrow \mathbb{N}$ · $a \cdot b = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1 \Rightarrow \mathbb{Z}$ · $a - b = 2\sqrt{5} \Rightarrow$ **irrasyonel**
$a/b = (2 + \sqrt{5})^2 / (4 - 5) = (9 + 4\sqrt{5}) / (-1) = -9 - 4\sqrt{5} \Rightarrow$ **irrasyonel**

ZOR **Örnek 21 (Gerekçelendirme). "Bir irrasyonel sayının karesi her zaman rasyoneldir." ifadesini değerlendir. Bir irrasyonelin küpü rasyonel olabilir mi?**

İfade **yanlıştır**. √2'nin karesi 2'dir, ama $(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$ irrasyoneldir; tek karşı örnek yeter. Küp için: $\sqrt[3]{2}$ irrasyoneldir ve $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$ rasyoneldir. Demek ki **evet**, olabilir. (√2'nin küpü ise $2\sqrt{2}$ olup irrasyoneldir; sonuç sayıya göre değişir.)

ZOR **Örnek 22 (Devirli ondalık). a) 0,4555... + 0,2777... toplamını kesir olarak yaz; sonuç hangi kümede? b) 0,999... = 1 olduğunu göster.**

a) $0{,}4\overline{5} = (45 - 4)/90 = 41/90$ · $0{,}2\overline{7} = (27 - 2)/90 = 25/90$ · Toplam: 66/90 = **11/15** = 0,7333... $\Rightarrow \mathbb{Q}$.
b) Aynı kuralla $0{,}\overline{9} = (9 - 0)/9 =$ **1**. Başka yol: 1/3 = 0,333... ise 3 · (1/3) = 0,999... = 1.

! Tuzak

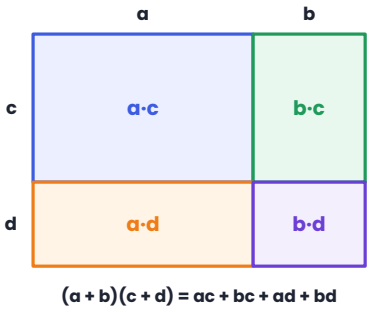
- Kesir gibi görünen her sayıyı rasyonel sanmak: π/2 bir kesir gibi yazılır ama payı irrasyonel olduğu için irrasyoneldir. Rasyonel olması için pay ve paydanın **tam sayı** olarak yazılabilmesi gerekir. (√8/√2 = 2 ise rasyoneldir.)
- π = 22/7 sanmak: 22/7 rasyoneldir; π'ye yalnızca yakındır.
- 0'ı doğal sayı saymamak: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ tanımında 0 vardır.

5. İşlem Özelliklerini Cebirsel Olarak İfade Etme

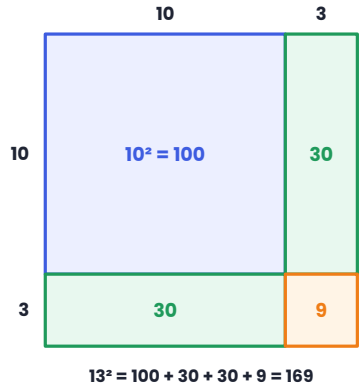
9.1.4 · Sayılarda gördüğün kuralı harflerle genelle

Bu kazanım, sayılarla yaparken fark ettiğin bir kuralı **harflerle** yazmanı ve kuralın adını doğru söylemeni bekler. Önce sayısal örneği gör, sonra genel hâlini yaz.

Özellik	Cebirsel ifade (a, b, c ∈ ℝ)	Sayısal örnek
Değişme	a + b = b + a · a·b = b·a	8 + 5 = 5 + 8
Birleşme	(a + b) + c = a + (b + c) · (a·b)·c = a·(b·c)	(2·50)·13 = 2·(50·13)
Dağılma	a·(b + c) = a·b + a·c	7·(20 + 3) = 140 + 21
Etkisiz eleman	a + 0 = a · a·1 = a	12 + 0 = 12
Ters eleman	a + (−a) = 0 · a·(1/a) = 1 (a ≠ 0)	4 · (1/4) = 1
Yutan eleman	a·0 = 0	2026 · 0 = 0
Sıfır çarpım	a·b = 0 ise a = 0 veya b = 0	x·(x − 5) = 0



Şekil 11. Dağılmanın iki kez kullanımı: Dikdörtgen dört parçaya ayrılır.



Şekil 12. Aynı model sayılarla: $13^2 = (10 + 3)^2$, iki tane 30'luk parça unutulmamalı.

KOLAY **Örnek 23. $999 \cdot 7$ işlemini zihinden yap; kullandığın özelliği yaz.**

Dağılma özelliği: $999 \cdot 7 = (1000 - 1) \cdot 7 = 7000 - 7 =$ **6993**

KOLAY **Örnek 24. $x^2 = 5x$ denklemini sağlayan x değerlerini bul.**

Her şeyi bir tarafa topla ve ortak çarpana al: $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 5) = 0$. Sıfır çarpım özelliği: $x = 0$ veya $x - 5 = 0 \Rightarrow$ **$x = 0$ veya $x = 5$**

ORTA **Örnek 25. Bölme işleminin birleşme ve değişme özellikleri var mıdır? Gösteriniz.**

İkisi de **yoktur**. Birleşme için karşı örnek: $(24 \div 4) \div 2 = 3$, ama $24 \div (4 \div 2) = 24 \div 2 = 12$. Değişme için: $24 \div 4 = 6$, ama $4 \div 24 = 1/6$. $a \div b = b \div a$ eşitliği yalnızca $a = b$ ya da $a = -b$ iken sağlanır; genel bir kural değildir. Özelliğin bozulduğunu göstermek için tek örnek yeter.

Taktik: Zihinden hesapta dağılmayı kullan: $49 \cdot 21 = 49 \cdot 20 + 49 = 980 + 49 = 1029$. $102 \cdot 35 = 3500 + 70 = 3570$. Toplama ve çarpmada değişme-birleşme ile sayıları "yuvarlak" çiftlere ayır: $2 \cdot 13 \cdot 50 = (2 \cdot 50) \cdot 13 = 1300$.

Sık yapılan hatalar

- Paydada toplam varken kesri bölmek: $12/(2 + 4) = 12/2 + 12/4$ **yanlış**. Sol taraf 2, sağ taraf 9. Dağılma ancak **payda** toplam olduğunda işler: $(a + b)/c = a/c + b/c$.
- Eksiyi paranteze dağıtırken ikinci terimi unutmak: $-(a - b) = -a - b$ yanlış, **$-a + b$** doğru.

ORTA **Örnek 26 (İki kare farkı). $53 \cdot 47$ çarpımını hesap makinesiz yapalım.**

$53 = 50 + 3$ ve $47 = 50 - 3$. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \Rightarrow 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 =$ **2491**.

Derinleşelim: Yeni tanımlanan bir işlemi incelemek

Yazılıda sıkça gelen bir soru tipi: Sana yeni bir işlem tanımlanır ve tanıdığın özelliklerin bu işlemde de geçerli olup olmadığı sorulur. Her özelliği **tanımı kullanarak** test et:

Özellik	Kontrol yöntemi (işlem: $*$)
Değişme	$a*b$ ile $b*a$'yı harflerle yaz; aynı ifade mi?
Birleşme	$(a*b)*c$ ile $a*(b*c)$'yi aç; aynı ifade mi?
Etkisiz eleman e	Her a için $a*e = a$ olacak **sabit** bir e var mı? (e, a'ya bağlı çıkarsa yoktur)
Ters eleman	$a*x = e$ denklemini x için çöz (e: etkisiz eleman)

Tek bir sayısal örnek bir özelliği **kanıtlamaz**: $1*2 = 2*1$ çıkması değişmeyi göstermez, harflerle yazmalısın. Ama özelliğin **olmadığını** göstermek için tek karşı örnek yeter. Bir püf noktası: İşlemi çarpanlarına ayırabiliyorsan (ör. $ab - 2a - 2b + 6 = (a - 2)(b - 2) + 2$) özellikleri görmek çok kolaylaşır.

ZOR **Örnek 27 (Yeni işlem). Gerçek sayılarda $a*b = ab - 2a - 2b + 6$ işlemi tanımlanıyor. a) Değişme ve birleşme özellikleri var mı? b) Etkisiz elemanı bul. c) 4'ün tersini bul. Hangi sayının tersi yoktur?**

İfadeyi düzenle: $ab - 2a - 2b + 4 + 2 =$ **$(a - 2)(b - 2) + 2$**.
a) $b*a = (b - 2)(a - 2) + 2 = a*b \Rightarrow$ **değişme var**. $(a*b)*c = [(a - 2)(b - 2) + 2 - 2](c - 2) + 2 = (a - 2)(b - 2)(c - 2) + 2$; $a*(b*c)$ de aynı ifadeyi verir $\Rightarrow$ **birleşme var**.
b) $(a - 2)(e - 2) + 2 = a \Rightarrow (a - 2)(e - 2) = a - 2 \Rightarrow$ her a için $e - 2 = 1 \Rightarrow$ **$e = 3$**.
c) $4*x = 3 \Rightarrow 2(x - 2) + 2 = 3 \Rightarrow x - 2 = 1/2 \Rightarrow$ **$x = 5/2$**. Genel olarak $(a - 2)(x - 2) = 1 \Rightarrow a = 2$ için çözüm yok: **2'nin tersi yoktur**.

Tuzak

- Etkisiz elemanı bulurken a'ya bağlı bir sonuç (ör. $e = (3 - a)/2$) bulup "etkisiz eleman bu" demek. Etkisiz eleman herkes için aynı tek sayı olmalı; a'ya bağlı çıkıyorsa etkisiz eleman **yoktur**.
- Ters elemanı bulurken $a*x = 0$ ya da $a*x = 1$ yazmak. Denklemin sağ tarafı her zaman **etkisiz eleman** olmalı.
- Birleşmeyi tek bir sayı üçlüsüyle "kanıtladığını" sanmak.

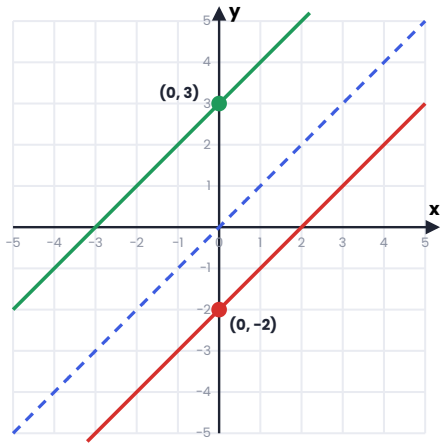
6. Doğrusal Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri

9.2.1 · $f(x) = x$ ve $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ (Senaryo 2 ve 3)

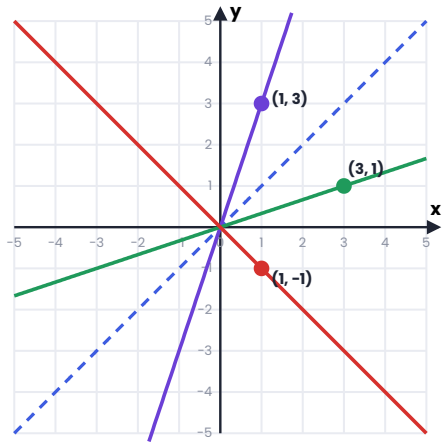
Referans fonksiyonumuz **$f(x) = x$**: Tanım ve görüntü kümesi $\mathbb{R}$'dir, orijinden geçer ve x büyüdükçe y de aynı miktarda büyüdüğü için **artandır**. Ondan türetilen her **$g(x) = a \cdot f(x - r) + k$** fonksiyonunun grafiği yine bir doğrudur. Parametreler grafiği şöyle değiştirir:

Parametre	Grafiğe etkisi
$+k$ / $-k$	k birim yukarı / aşağı öteleme
$f(x - r)$ / $f(x + r)$	r birim sağa / sola öteleme (işarete dikkat!)
$\lvert a\rvert > 1$ · $0 < \lvert a\rvert < 1$	Doğru dikleşir · doğru yatıklaşır
$a < 0$	x eksenine göre yansıma; fonksiyon azalan olur

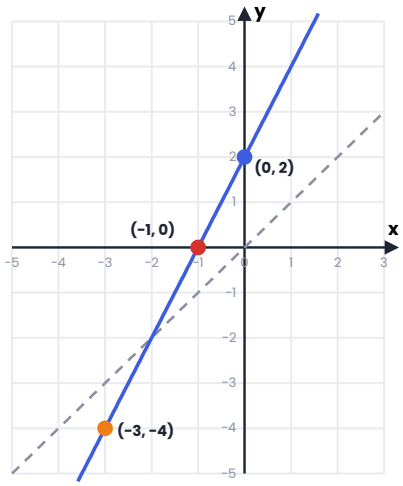
Nitel özellikler: artan/azalan olma, eksenleri kestiği noktalar (sıfırı), pozitif ve negatif olduğu aralıklar, tanım ve görüntü kümesi.



Şekil 13. ■ **f(x) = x** ■ **f(x) + 3** ■ **f(x) - 2**
+k grafiği yukarı, -k aşağı taşır. Eğim değişmez; doğrular paraleldir.



Şekil 14. ■ **3·f(x)** ■ **(1/3)·f(x)** ■ **-f(x)**
a = 3 dikleştirir, a = 1/3 yatıklaştırır; a < 0 grafiği x eksenine göre yansıtır.



Şekil 15. g(x) = 2x + 2. f'nin orijindeki noktası (-3, -4)'e taşındı; eğim 2 olduğundan g artandır. (Kesik çizgi: f(x) = x)

ORTA **Örnek 28. f(x) = x olmak üzere g(x) = 2·f(x + 3) - 4 fonksiyonunu inceleyelim.**

g(x) = 2(x + 3) - 4 = 2x + 6 - 4 = **2x + 2**
a = 2 > 0 ⇒ **artan**
y eksenini kestiği nokta: g(0) = 2 ⇒ **(0, 2)**
Sıfırı: 2x + 2 = 0 ⇒ x = -1 ⇒ **(-1, 0)**
g(x) > 0 olduğu aralık: x > -1 ⇒ **(-1, ∞)**

Taktik: g(x) = a·f(x - r) + k'de f'nin orijindeki noktası **(r, k)** noktasına taşınır. Bu noktayı işaretle, sonra 1 birim sağa gidip a birim yukarı (a negatifse aşağı) çık. İki nokta buldun mu, doğru hazırdır.

ORTA **Örnek 29. Grafiği (-1, 5) ve (3, -3) noktalarından geçen doğrusal fonksiyonu f(x) = x cinsinden yaz.**

Eğim: (-3 - 5) / (3 - (-1)) = -8/4 = -2. g(x) = -2x + b; g(-1) = 2 + b = 5 ⇒ b = 3.
⇒ g(x) = -2x + 3 = **-2·f(x) + 3**. Kontrol: g(3) = -6 + 3 = -3 ✓

Sık yapılan hata

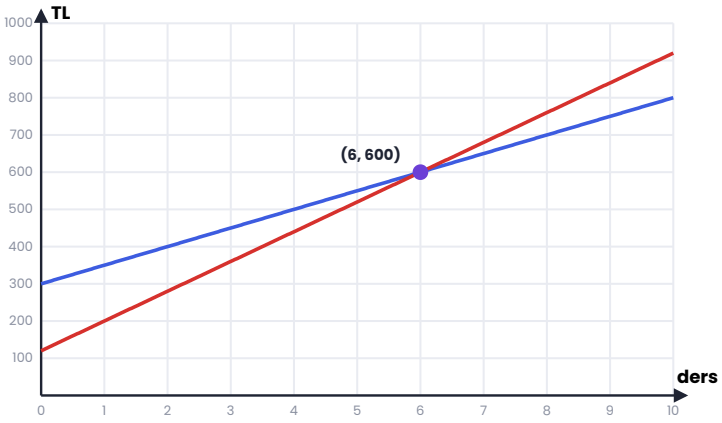
a·f(x - r) + k'yi açarken a'yı parantezin yalnızca ilk terimiyle çarpmak: 2(x + 3) - 4 = 2x + 3 - 4 **yanlış**. a parantezin tamamına dağılır: 2x + 6 - 4 = 2x + 2.

Derinleşelim: Parametreleri grafikten okumak ve yazılışın tek olmaması

- **İki noktadan fonksiyon:** Eğim $a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Sonra noktalardan birini yerine koyup sabit terimi bul.
- **Yazılış tek değildir:** $g(x) = 2x + 2$ hem $2\cdot f(x + 1)$ hem $2\cdot f(x - 1) + 4$ hem de $2\cdot f(x + 3) - 4$ olarak yazılabilir. Hepsi aynı doğrudur; doğru kendi üzerinde kaydırılınca yine kendisi olur. Sınavda "(r, k) noktası" istenirse soruda verilen yazılışı kullan.
- **Paralellik ve kesişim:** Eğimleri (a) eşit olan doğrusal fonksiyonların grafikleri paraleldir. Eğimler farklıysa grafikler tek bir noktada kesişir; bu noktayı $g_1(x) = g_2(x)$ denklemini çözerek bulursun.

ORTA **Örnek 30. $f(x) = x$ olmak üzere $g(x) = -(1/2)\cdot f(x + 4) + 1$ fonksiyonunun cebirsel ifadesini, eksenleri kestiği noktaları ve artan/azalan olduğunu bul.**

$g(x) = -(1/2)(x + 4) + 1 = -x/2 - 2 + 1 =$ **$-x/2 - 1$**. y ekseni: $g(0) = -1 \Rightarrow$ **$(0, -1)$**. Sıfırı: $-x/2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow$ **$(-2, 0)$**. $a = -1/2 < 0 \Rightarrow$ **azalan**. (Referans nokta $(-4, 1)$; $g(-4) = 2 - 1 = 1$ ✓)



Şekil 16. ■ **A: 50x + 300** ■ **B: 80x + 120**
İki doğru (6, 600) noktasında kesişir. 6 dersten azında B (kırmızı) altta, 6 dersten fazlasında A (mavi) altta, yani daha ucuz.

ZOR **Örnek 31 (Müzik kursu). A gitar kursu 300 TL kayıt ücreti ve ders başına 50 TL, B gitar kursu 120 TL kayıt ücreti ve ders başına 80 TL alıyor. a) Ücretleri $f(x) = x$ cinsinden yaz. b) Kaç derste iki kursun ücreti eşit olur? c) Hangi ders sayılarında A daha ucuzdur? Gerekçelendir.**

a) $A(x) = 50\cdot f(x) + 300$, $B(x) = 80\cdot f(x) + 120$ (x: ders sayısı).
b) $50x + 300 = 80x + 120 \Rightarrow 180 = 30x \Rightarrow$ **$x = 6$ ders**; ikisi de 600 TL.
c) $A - B = -30x + 180 < 0 \Rightarrow x > 6$. Ders sayısı doğal sayı olduğundan **7 ve daha fazla derste** A daha ucuzdur. Gerekçe: A'nın ders başına ücreti (eğimi) daha küçük; aradaki 180 TL'lik kayıt farkı her derste 30 TL kapanır ve 6. derste sıfırlanır.

! Tuzak

- Eşitlik noktasını bulup "hangisi ucuz?" sorusuna tek sayıyla cevap vermek. Cevap bir aralık ya da sayı grubu olmalı: $x > 6$.
- x bir sayım değeriyse (ders, kitap, maç) aralığı doğal sayılarla yorumlamamak: "$x > 6$" yerine "7 ve daha fazla ders" demek daha doğru.
- $f(x + 3)$'ü sağa öteleme sanmak. Parantez içindeki +3 grafiği **sola** götürür: Referans nokta $x = -3$'e kayar.

90+ Atölyesi

Kazanımları birleştiren zor sorular. Önce kendin dene, sonra çözüme bak.

ZOR **Atölye 1 (Üslü denklem). $(1/3)^{x-4} = 9^{x+1}$ eşitliğini sağlayan x kaçtır?**

İki tarafı da 3 tabanında yaz: $(1/3)^{x-4} = 3^{-(x-4)} = 3^{-x+4}$ ve $9^{x+1} = 3^{2x+2}$.
$-x + 4 = 2x + 2 \Rightarrow 2 = 3x \Rightarrow$ **x = 2/3**.

Puan kaybettiren nokta: $(1/3)^{x-4}$'ü 3^{x-4} diye yazmak. $1/3 = 3^{-1}$ olduğundan üssün tamamı -1 ile çarpılır.

ZOR **Atölye 2 (Farklı dereceli kökler). $a = \sqrt[3]{4}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt[6]{20}$ sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız.**

Ortak derece 6: $a = 4^{1/3} = 4^{2/6} = \sqrt[6]{16}$, $b = 3^{1/2} = 3^{3/6} = \sqrt[6]{27}$, $c = \sqrt[6]{20}$. Kök içleri $16 < 20 < 27 \Rightarrow$ **a < c < b**.

Puan kaybettiren nokta: Dereceleri eşitlemeden kök içlerini karşılaştırmak: $20 > 4$ diye $\sqrt[6]{20} > \sqrt[3]{4}$ demek doğru sonuca tesadüfen ulaşsa da gerekçesizdir; $20 > 3$ diye $\sqrt[6]{20} > \sqrt{3}$ demek ise düpedüz yanlıştır.

ZOR **Atölye 3 (Spor salonu zemini). Okulun dikdörtgen biçimindeki masa tenisi salonunun kenarları $\sqrt{45}$ m ve $\sqrt{20}$ m'dir. a) Salonun çevresini ve alanını en sade biçimde bulunuz. b) Duvar diplerine metresi 25 TL olan koruma bandı çekilecek. Maliyet yaklaşık kaç TL'dir? ($\sqrt{5} \approx 2{,}236$) c) Zemin metrekaresi 120 TL olan spor parkesiyle kaplanacak. Parke kaç TL tutar?**

a) $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Çevre $= 2(3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) =$ **$10\sqrt{5}$ m**. Alan $= 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 6 \cdot 5 =$ **30 m²**.
b) $10\sqrt{5} \cdot 25 = 250\sqrt{5} \approx 250 \cdot 2{,}236 =$ **559 TL**.
c) $30 \cdot 120 =$ **3600 TL**.

Puan kaybettiren nokta: Alanı $6\sqrt{5}$ bırakmak; $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ olduğunu kullanmamak. Bir de çevre ile alanın birimlerini (m ve m²) karıştırmak.

ZOR **Atölye 4 (Parametreli aralık). A = (−5, b] ve B = [1, 8) olmak üzere $A \cap B = [1, 4]$ ise b kaçtır? Bu durumda $A \cup B$ kümesini yazınız.**

Kesişimin sağ ucu 4 ve dahil. B'nin sağ ucu 8 olduğundan bu uç A'dan gelmeli $\Rightarrow$ **b = 4**. (Sol uç 1, B'den gelir; $1 \in A$ olduğu için dahildir.)
$A = (-5, 4] \Rightarrow A \cup B =$ **(−5, 8)**.

Puan kaybettiren nokta: Kesişimin uçlarının hangi kümeden geldiğine bakmamak. Ayrıca $A \cup B$'de 4'ü bir uç sanmak: 4, B'nin içinde kaldığı için birleşimde iç noktadır.

ZOR **Atölye 5 (Küme ve gerekçe). $x = \sqrt{18} \div \sqrt{2} - 2^0$ ve $y = (\sqrt{3} - 2)^2$ veriliyor. a) x ve y'nin ait olduğu en küçük kümeleri bulunuz. b) x·y rasyonel midir? Gerekçelendiriniz. c) $y + 4\sqrt{3}$ hangi kümededir? Bu sonuç irrasyonel sayılar hakkında ne söyler?**

a) $x = \sqrt{9} - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \mathbb{N}$. $y = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = 7 - 4\sqrt{3} \Rightarrow$ **irrasyonel**.
b) $x \cdot y = 14 - 8\sqrt{3}$. 14 rasyonel, $8\sqrt{3}$ irrasyonel; rasyonel + irrasyonel her zaman irrasyoneldir ⇒ **rasyonel değildir**.
c) $y + 4\sqrt{3} = 7 \Rightarrow \mathbb{N}$. İki irrasyonelin ($7 - 4\sqrt{3}$ ve $4\sqrt{3}$) toplamı rasyonel çıkabilir; irrasyoneller toplamaya göre kapalı değildir.

Puan kaybettiren nokta: $(\sqrt{3} - 2)^2 = 3 + 4 = 7$ yazmak; ortadaki $-2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = -4\sqrt{3}$ terimini unutmak. Ayrıca 2^0'ı 0 sanmak.

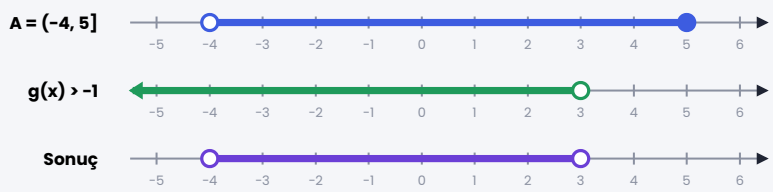
ZOR **Atölye 6 (Yeni işlem). Gerçek sayılarda $a \diamond b = 3ab$ işlemi tanımlanıyor. a) Etkisiz elemanı bulunuz. b) 2'nin tersini bulunuz. Tersi olmayan sayı hangisidir? c) $(1 \diamond 2) \diamond (1/2)$ kaçtır?**

a) $a \diamond e = 3ae = a \Rightarrow$ her a için $3e = 1 \Rightarrow$ **$e = 1/3$**.
b) $2 \diamond x = 1/3 \Rightarrow 6x = 1/3 \Rightarrow$ **$x = 1/18$**. $0 \diamond x = 0 \neq 1/3$ olduğundan **0'ın tersi yoktur**.
c) $1 \diamond 2 = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$; $6 \diamond (1/2) = 3 \cdot 6 \cdot (1/2) =$ **9**.

Puan kaybettiren nokta: Etkisiz elemanı alışkanlıkla 1 sanmak. $a \diamond 1 = 3a \neq a$; etkisiz eleman tanımdan bulunur. Ters eleman denklemi $a \diamond x = 1/3$ olmalı.

ZOR **Atölye 7 (Fonksiyon + aralık). Doğrusal g fonksiyonunun grafiği (−2, 9) ve (2, 1) noktalarından geçiyor. A = (−4, 5] olmak üzere A kümesinde $g(x) > -1$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerini aralıkla yazınız. Bu aralıkta kaç tam sayı vardır?**

Eğim $= (1 - 9)/(2 - (-2)) = -8/4 = -2$. $g(x) = -2x + b$, $g(2) = -4 + b = 1 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow g(x) = -2x + 5$.
$-2x + 5 > -1 \Rightarrow -2x > -6 \Rightarrow x < 3$ (negatife bölünce yön döner). $A \cap (-\infty, 3) =$ **$(-4, 3)$**. Tam sayılar: −3, −2, −1, 0, 1, 2 ⇒ **6 tane**.



Şekil 17. A ile (−∞, 3) kesiştirilir; 3 dahil değildir, −4 de A'da olmadığı için dahil değildir.

Puan kaybettiren nokta: −2'ye bölerken eşitsizlik yönünü çevirmemek ve bulduğun aralığı A ile kesiştirmeyi unutmak.

Prova 1 – Temel

40 dakika · 6 açık uçlu soru · 100 puan. Önce kendin çöz, sonra cevap anahtarına bak.

Soru 1 (15 puan). $A = (4^3 \cdot 8^{-1}) \div 2^5$ ve $B = 81^{3/4}$ olduğuna göre $A \cdot B$ çarpımını bulunuz.

Soru 2 (15 puan). $\sqrt{48} + \sqrt{27} - 9/\sqrt{3}$ işleminin sonucunu en sade biçimde yazınız.

Soru 3 (20 puan). $A = (-4, 3]$ ve $B = [1, 7)$ aralıkları veriliyor.
a) $A \cup B$, $A \cap B$ ve $A \setminus B$ kümelerini aralık gösterimiyle yazınız ve sayı doğrusunda gösteriniz.
b) $A \cap B$ kümesinde kaç tam sayı vardır?

Soru 4 (15 puan). a) $-9, \sqrt{81}, 0{,}1666\ldots, \sqrt{20}, 7/3, \sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ sayılarını ait oldukları en küçük sayı kümesine yerleştiriniz.
b) İrrasyonel sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalı mıdır? Bir örnekle açıklayınız.

Soru 5 (15 puan). a) $58 \cdot 73 + 42 \cdot 73$ işlemini en kısa yoldan yapınız; kullandığınız özelliğin adını ve cebirsel ifadesini yazınız.
b) $(3x + 9) \cdot (x - 2) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulunuz. Hangi özelliği kullandınız?

Soru 6 (20 puan). $f(x) = x$ olmak üzere $g(x) = 3 \cdot f(x + 1) - 6$ fonksiyonu veriliyor.
a) $g(x)$'i cebirsel olarak yazınız. b) Grafiğin eksenleri kestiği noktaları bulunuz. c) g artan mı, azalan mı? $g(x) > 0$ olduğu aralığı yazınız. d) Grafiği çiziniz.

Prova 1 – Cevap Anahtarı ve Puanlama

Her adımın puanı parantez içinde. Soru puanı = adım puanlarının toplamı.

1) $4^3 = 2^6$, $8^{-1} = 2^{-3} \Rightarrow A = 2^{6-3-5} = 2^{-2} = 1/4$ **(7 p)**. $B = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$ **(5 p)**. $A \cdot B =$ **27/4 (3 p)**

2) $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ **(6 p)**; $9/\sqrt{3} = 9\sqrt{3}/3 = 3\sqrt{3}$ **(6 p)**; $4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} =$ **$4\sqrt{3}$ (3 p)**

3) a) $A \cup B =$ **$(-4, 7)$ (4 p)**, $A \cap B =$ **$[1, 3]$ (4 p)**, $A \setminus B =$ **$(-4, 1)$ (4 p)**; sayı doğrusunda doğru gösterim **(4 p)**
b) 1, 2, 3 ⇒ **3 tam sayı (4 p)**

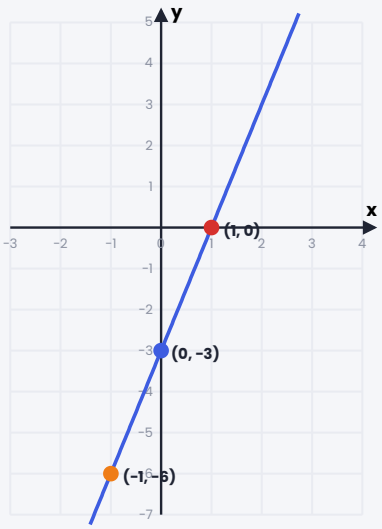


Şekil 18. 1, A \ B'de yoktur çünkü B'de var; 3 ise A ∩ B'de vardır çünkü ikisinde de var.

4) a) $\sqrt{81} = 9$ ve $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9 \Rightarrow \mathbb{N}$; $-9 \Rightarrow \mathbb{Z}$; $0{,}1666\ldots = (16 - 1)/90 = 1/6$ ve $7/3 \Rightarrow \mathbb{Q}$; $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow$ irrasyonel (her biri 1,5 p) **(9 p)** b) Kapalı değildir: $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{8}$ irrasyoneldir ama $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ rasyoneldir **(6 p)**

5) a) Dağılma özelliği, $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$: $73 \cdot (58 + 42) = 73 \cdot 100 =$ **7300 (8 p)** b) Sıfır çarpım özelliği: $3x + 9 = 0$ veya $x - 2 = 0 \Rightarrow$ **$x = -3$ veya $x = 2$ (7 p)**

6) a) $g(x) = 3(x + 1) - 6 =$ **$3x - 3$ (5 p)**
b) $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow$ **$(0, -3)$**; $y = 0 \Rightarrow 3x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ **$(1, 0)$ (5 p)**
c) $a = 3 > 0 \Rightarrow$ **artan**; $3x - 3 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow$ **$(1, \infty)$ (5 p)**
d) Referans nokta $(-1, -6)$; eksen kesişim noktalarından geçen doğru **(5 p)**



Şekil 19. $g(x) = 3x - 3$ grafiği.

Toplam: 15 + 15 + 20 + 15 + 15 + 20 = 100 puan.

Prova 2 – 90+ Zorluk

40 dakika · 6 açık uçlu soru · 100 puan. Her adımı yazarak çöz.

Soru 1 (15 puan). $9^{x+1} \cdot 3^{-x} = 27^{x-1}$ **eşitliğini sağlayan x değerini bulunuz.**

Soru 2 (15 puan). $(\sqrt{7}+\sqrt{3}) / (\sqrt{7}-\sqrt{3}) - \sqrt{21}/2$ **işleminin sonucunu en sade biçimde yazınız. Sonuç hangi sayı kümesine aittir? Gerekçelendiriniz.**

Soru 3 (20 puan). $A = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x \le 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x \ge -1\}$ **ve** $C = [0, 6)$ **veriliyor.**
a) $(A \setminus B) \cup (B \cap C)$ **kümesini aralık gösterimiyle yazınız ve sayı doğrusunda gösteriniz.**
b) Bu kümede kaç tam sayı vardır? c) $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$ **kümesini yazınız.**

Soru 4 (15 puan). $a = 3+\sqrt{2}$ **ve** $b = 3-\sqrt{2}$ **veriliyor. a + b, a·b, a - b ve a/b sayılarının rasyonel mi irrasyonel mi olduğunu gösteriniz. "İki irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyoneldir." ifadesini değerlendiriniz.**

Soru 5 (15 puan). Gerçek sayılarda $a * b = a + b + ab$ **işlemi tanımlanıyor. a) Değişme özelliği var mıdır? Gösteriniz. b) Etkisiz elemanı bulunuz. c) 2'nin tersini bulunuz; hangi sayının tersi yoktur? d)** $(1*2)*(-1)$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

Soru 6 (20 puan). Bir oyun salonunda A kartını alan biri 60 TL kart ücreti öder ve jeton başına 4 TL verir. Kart almayan (B seçeneği) ise jeton başına 10 TL öder. x kullanılan jeton sayısı olmak üzere:
a) İki seçeneği f(x) = x cinsinden a·f(x) + k biçiminde yazınız. b) Kaç jetonda iki seçenek eşit ücretlidir? c) Hangi kullanımlarda A kartı daha avantajlıdır? d) Bir turnuva günü 25 jeton kullanacak bir öğrenci hangi seçenekle kaç TL tasarruf eder?

Prova 2 – Cevap Anahtarı ve Puanlama

Her adımın puanı parantez içinde. Soru puanı = adım puanlarının toplamı.

1) $9^{x+1} = 3^{2x+2}$, $27^{x-1} = 3^{3x-3}$ **(5 p)** $\Rightarrow 3^{2x+2-x} = 3^{x+2} = 3^{3x-3}$ **(4 p)** $\Rightarrow x + 2 = 3x - 3 \Rightarrow$ **x = 5/2 (6 p)**

2) Eşlenikle genişlet: $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2 / (7-3) = (10+2\sqrt{21})/4 = (5+\sqrt{21})/2$ **(8 p)**. $(5+\sqrt{21})/2 - \sqrt{21}/2 =$ **5/2 (4 p)**. 5/2 iki tam sayının oranı olduğundan sonuç $\mathbb{Q}$'dadır (tam sayı değildir) **(3 p)**

3) a) $A \setminus B = (-5, -1]$ **(4 p)**, $B \cap C = [0, 6)$ **(4 p)** $\Rightarrow$ birleşim **$(-5, -1] \cup [0, 6)$ (4 p)** (sayı doğrusu dahil) b) −4, −3, −2 ve 0, 1, 2, 3, 4, 5 $\Rightarrow$ **9 tam sayı (4 p)** c) $A \cup B = (-5, \infty) \Rightarrow \mathbb{R} \setminus (A \cup B) =$ **$(-\infty, -5]$ (4 p)**



Şekil 20. −1, B'de olduğu için $A \setminus B$'den atılır (boş daire). −1 ile 0 arası sonuçta yer almaz; cevap iki parçalıdır.

4) a + b = 6 (rasyonel) **(3 p)**, a·b = 9 − 2 = 7 (rasyonel) **(3 p)**, a − b = 2√2 (irrasyonel) **(3 p)**, a/b = $(3+\sqrt{2})^2/7 = (11+6\sqrt{2})/7$ (irrasyonel) **(3 p)**. İfade **yanlıştır**: a ve b irrasyonel olduğu hâlde a + b = 6 rasyoneldir **(3 p)**

5) a) $b*a = b + a + ba = a*b \Rightarrow$ **değişme var (4 p)** b) $a + e + ae = a \Rightarrow e(1 + a) = 0$, her a için $\Rightarrow$ **e = 0 (4 p)** c) $2*x = 0 \Rightarrow 2 + x + 2x = 0 \Rightarrow$ **x = -2/3**; $a + x + ax = 0 \Rightarrow x = -a/(1 + a) \Rightarrow$ **-1'in tersi yoktur (4 p)** d) $1*2 = 1 + 2 + 2 = 5$; $5*(-1) = 5 - 1 - 5 =$ **-1 (3 p)**

6) a) $A(x) = 4\cdot f(x) + 60$, $B(x) = 10\cdot f(x) + 0$ **(4 p)** b) $4x + 60 = 10x \Rightarrow 60 = 6x \Rightarrow$ **x = 10 jeton** (ikisi de 100 TL) **(6 p)** c) $A(x) < B(x) \Rightarrow 60 < 6x \Rightarrow x > 10 \Rightarrow$ **11 ve daha fazla jetonda** A avantajlı **(5 p)** d) $A(25) = 160$ TL, $B(25) = 250$ TL $\Rightarrow$ A kartıyla **90 TL tasarruf (5 p)**

Toplam: 15 + 15 + 20 + 15 + 15 + 20 = 100 puan.

Son gün kontrol listesi (90+ hedefi)

- [ ] Üs kurallarını, işaret kuralını ve ortak çarpan parantezini ($3^{x+1} + 3^{x-1} = 10\cdot3^{x-1}$) güvenle kullanıyorum.
- [ ] Üslü sayıları taban ya da üs eşitleyerek, köklü sayıları katsayıyı içeri alarak veya dereceyi eşitleyerek sıralayabiliyorum.
- [ ] $\sqrt{a^2} = |a|$ kuralını işaret kontrolü yaparak uyguluyor, paydayı eşlenikle rasyonel yapabiliyorum.
- [ ] Birleşim, kesişim, fark ve tümleyeni sayı doğrusunda doğru parantezlerle yazıyor; iki parçalı sonucu ∪ ile gösteriyorum.
- [ ] Devirli ondalığı kesre çevirebiliyor, rasyonel + irrasyonel = irrasyonel olduğunu gerekçelendirebiliyor, kapalılık için karşı örnek verebiliyorum.
- [ ] Yeni tanımlanan bir işlemde değişme, birleşme, etkisiz ve ters elemanı harflerle inceleyebiliyorum.
- [ ] $g(x) = a\cdot f(x - r) + k$'yi açıp eksen kesişimlerini, artan/azalanı ve pozitif olduğu aralığı bulabiliyorum; iki doğruyu karşılaştırıp cevabı aralıkla veriyorum.
- [ ] Her cevapta veri, işlem, sonuç, birim ve gerekçeyi yazıyorum.

Başarılar!

Kaynak: MEB ÖDSGM konu soru dağılım tablosu 2026-2027