12. SINIF MATEMATİK · 1. DÖNEM 1. YAZILI · 90+ SÜRÜMÜ · VARYASYON A

Kuvvetten Logaritmaya, Logaritmadan Dizilere: 90+ Yol Haritası

Üstel fonksiyon bir sayıyı tekrar tekrar aynı çarpanla büyütür; logaritma ise bu işi geriye sarar ve **"kaç kez çarptım?"** sorusunu cevaplar. Diziler de aynı fikrin adım adım hâlidir. Bu notta konuları spor salonundan konser sahnesine, okul kütüphanesinden satranç turnuvasına uzanan örneklerle, grafik üzerinde göre göre çalışacaksın. Her bölümde bir **Derinleşelim** kutusu, **Kolay / Orta / Zor** sırasıyla ilerleyen çözümlü örnekler ve bir AYT bağlantısı var. Konuların ardından **90+ Atölyesi** geliyor; en sonda iki tam prova seni bekliyor: **Prova 1 – Temel** ve **Prova 2 – 90+ Zorluk**.

Sınav bilgisi ve kapsam

Ortak yazılı sınav takvimine göre matematik yazılısı **5 Kasım 2026** tarihinde ve **40 dakika**. Kesin gün ve saati okulundan da teyit et. 12. sınıflar henüz yeni modele geçmediği için kazanımlar önceki öğretim programına göre; aşağıdaki tablo MEB'in 12. sınıf konu soru dağılım tablosundan alındı.

Kazanım	Konu	Soru sayısı
12.1.1.1	Üstel fonksiyon	0–1
12.1.2.1	Logaritma fonksiyonu ile üstel fonksiyonun ilişkisi	0–1
12.1.2.2	10 ve e tabanında logaritma	0–2
12.1.2.3	Logaritma fonksiyonunun özellikleri	0–3
12.1.3.1	Üstel ve logaritmik denklemler ve eşitsizlikler	0–3
12.1.3.2	Üstel ve logaritmik fonksiyonlarla gerçek hayat modelleme	0–1
12.2.1.1–4	Diziler: tanım, genel terim ve indirgeme, aritmetik ve geometrik dizi, problemler	0–2 (her kazanım)

MEB tablosunda **8 senaryo** bulunuyor; okulundaki zümre bunlardan birini seçiyor. 1. ve 2. senaryolarda yalnızca üstel-logaritmik fonksiyonlar var, 3–8. senaryolara **diziler** de giriyor. Hangi senaryonun seçildiğini öğretmenine sor; bilgi alamazsan iki konuya birden hazırlan.

Tam puan için cevap yazma

Yazılı açık uçlu ve öğretmen puanı adım adım dağıtıyor. Logaritma sorularında puanın önemli bir kısmı, son cevaptan önce yazdığın **tanım kümesi** satırında. Her cevabı teslim etmeden önce şu parçaları gözden geçir:

Parça	Öğretmenin baktığı şey
Tanım kümesi	Logaritmada taban > 0, taban ≠ 1 ve içi > 0 şartlarını **işleme başlamadan** yazdın mı? Değişken değiştirdiysen $t = a^x > 0$ notunu ekledin mi?
Veri	Verilenleri formülde doğru yere koydun mu? (%25 artış → çarpan 1,25; katlanma süresi k; a_1, d, r)
İşlem	Hangi kuralı kullandığın görünüyor mu? (tabanları eşitleme, çarpım kuralı, zincir kuralı, $a_n = a_1 + (n - 1)d$)

Sonuç + kontrol	Bulduğun kökleri tanım kümesiyle kesiştirdin mi? Çözüm kümesini { } ya da aralık olarak yazdın mı?
Birim ve gerekçe	Model sorularında TL, takipçi, ay, dB gibi birimler; "kaçıncı ayda" sorusunda bağlama uygun yuvarlama ve kısa bir gerekçe cümlesi.

Mini örnek: $\log_2(x - 2) + \log_2(x + 5) = 3$ denkleminin çözüm kümesini bul. (10 puan)

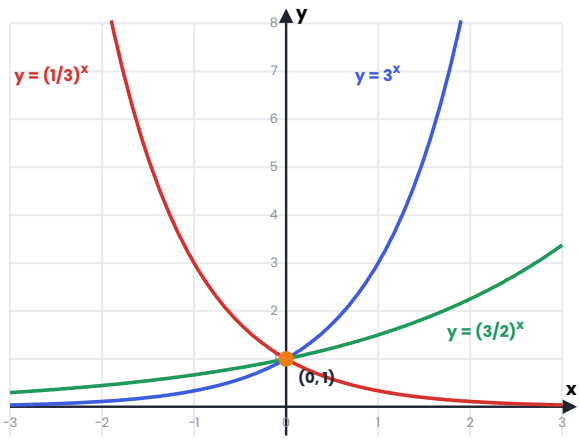
Zayıf cevap (4/10)
$(x - 2)(x + 5) = 8 \rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \rightarrow (x + 6)(x - 3) = 0 \rightarrow x = -6$ veya $x = 3$.
Ç = {-6, 3}.

Tam puanlık cevap (10/10)
Tanım: $x - 2 > 0$ ve $x + 5 > 0 \rightarrow x > 2$.
Çarpım kuralı: $\log_2[(x - 2)(x + 5)] = 3 \rightarrow x^2 + 3x - 10 = 2^3 = 8 \rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \rightarrow x = -6$ veya $x = 3$.
Kontrol: $-6 < 2$, tanım kümesinde değil. **Ç = {3}**.

1. Üstel Fonksiyon

12.1.1.1 · $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Değişken **üste** çıktığında üstel fonksiyon elde ederiz: $f(x) = a^x$. Tabandan iki şey isteriz: **$a > 0$** ve **$a \neq 1$**. Taban 1 olsaydı her x için sonuç 1 çıkar, fonksiyon sabitlenirdi; taban negatif olsaydı $(-3)^{1/2}$ gibi ifadeler gerçek sayı vermezdi.



Şekil 1. Üç üstel fonksiyon da (0, 1) noktasından geçer ve x eksenine (y = 0) yaklaşır ama değmez. $y = 3^x$ ile $y = (1/3)^x$ birbirinin y eksenine göre simetriğidir.

Özellik	$a > 1$	$0 < a < 1$
Tanım kümesi	Tüm gerçek sayılar	Tüm gerçek sayılar
Görüntü kümesi	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$
Ortak nokta	(0, 1), çünkü $a^0 = 1$	(0, 1)
Davranış	Artan	Azalan
$x \rightarrow -\infty$ iken	$y \rightarrow 0$	$y \rightarrow \infty$

Derinleşelim: Grafiği ve tabanı birlikte okumak

- **Bire bir olma:** $a > 0$, $a \neq 1$ iken $a^m = a^k$ ise $m = k$. "Tabanları eşitle, üsleri eşitle" hamlesi buna dayanır. Taban 1 olsaydı $1^4 = 1^9$ olurdu ve bu çıkarım çökerdi.
- **Ayna görüntüsü:** $a^{-x} = (1/a)^x$. Bu yüzden $y = 3^x$ ile $y = (1/3)^x$ grafikleri y eksenine göre simetriktir (Şekil 1).
- **Kaydırma:** $y = a^{x - h} + k$ grafiği, a^x grafiğinin h birim sağa ve k birim yukarı taşınmış hâlidir. Asimptot $y = k$ olur, görüntü kümesi (k, ∞) olur; (0, 1) noktası $(h, 1 + k)$ noktasına gider.
- **Karşılaştırma:** Sayıları ya aynı tabana ya da aynı üsse getir. Üs ortak ve pozitifse büyük taban kazanır; taban ortak ve 1'den büyükse büyük üs kazanır.

KOLAY **Örnek 1. $f(x) = 3^{x-1}$ için $f(3)$, $f(1)$ ve $f(-1)$ değerlerini bul.**

$f(3) = 3^2 = \mathbf{9} \cdot f(1) = 3^0 = \mathbf{1} \cdot f(-1) = 3^{-2} = \mathbf{1/9}$

ORTA **Örnek 2. $f(x) = (5-m)^x$ bir üstel fonksiyon olsun. m hangi değerleri alabilir? f'nin azalan olması için m ne olmalı?**

Üstel olma: $5 - m > 0$ ve $5 - m \neq 1 \rightarrow \mathbf{m < 5}$ **ve** $\mathbf{m \neq 4}$.
Azalan olma: taban 0 ile 1 arasında olmalı $\rightarrow 0 < 5 - m < 1 \rightarrow \mathbf{4 < m < 5}$.

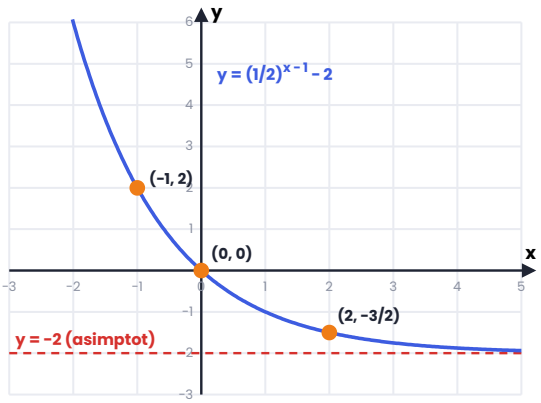
ORTA **Örnek 3. $a = 4^{12}$, $b = 3^{18}$, $c = 7^9$ sayılarını küçükten büyüğe sırala.**

Üslerin ortak böleni 3: $a = (4^4)^3 = 256^3$, $b = (3^6)^3 = 729^3$, $c = (7^3)^3 = 343^3$. Üs aynı ve pozitif olduğundan taban büyüdükçe sayı büyür: $256 < 343 < 729 \rightarrow \mathbf{a < c < b}$.

ORTA **Örnek 4. $f(x) = a \cdot b^x$ $(b > 0)$ fonksiyonunun grafiği (1, 6) ve (3, 54) noktalarından geçiyor. $f(0)$ ve $f(-1)$ kaçtır?**

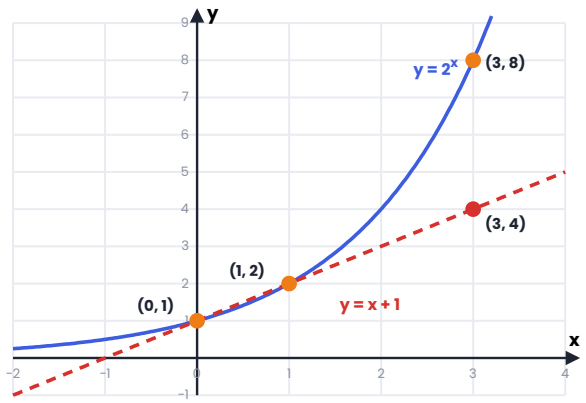
Oranla: $f(3)/f(1) = b^2 = 54/6 = 9 \rightarrow b = 3$ ($b > 0$ olduğu için -3 elenir). $f(1) = 3a = 6 \rightarrow a = 2$.
$f(x) = 2 \cdot 3^x \rightarrow \mathbf{f(0) = 2}$, $\mathbf{f(-1) = 2/3}$.

ZOR **Örnek 5. $f(x) = (1/2)^{x-1} - 2$ fonksiyonu için a) asimptotu ve görüntü kümesini bul. b) Grafiğin eksenleri kestiği noktaları bul. c) Grafik hangi bölgelerden geçer? Gerekçelendir.**



Şekil 2. $y = (1/2)^x$ grafiği 1 birim sağa, 2 birim aşağı kaydırıldı: asimptot $y = -2$, eğri orijinden geçiyor.

a) $(1/2)^{x-1} > 0 \rightarrow f(x) > -2$. Asimptot **$y = -2$**, görüntü kümesi **$(-2, \infty)$**.
b) y ekseni: $f(0) = (1/2)^{-1} - 2 = 2 - 2 = 0$. x ekseni: $(1/2)^{x-1} = 2 = (1/2)^{-1} \rightarrow x - 1 = -1 \rightarrow x = 0$. Grafik iki ekseni de **orijinde (0, 0)** keser.
c) Taban $1/2 < 1$, fonksiyon azalan. $x < 0$ iken $f(x) > f(0) = 0 \rightarrow$ **II. bölge**; $x > 0$ iken $f(x) < 0 \rightarrow$ **IV. bölge**. I. ve III. bölgelerden geçmez.



Şekil 3. 2^x (üstel) ile x + 1 (doğrusal) x = 0 ve x = 1'de kesişir. Bu iki nokta arasında doğru üstte; sonra 2^x hızla öne geçer: x = 3'te 8'e karşı 4.

Taktik: Grafik sorusunda ilk iş **(0, 1)** noktasını ara. Grafik oradan geçmiyorsa ya kaydırılmıştır ya da karşındaki fonksiyon a^x değildir. Kaydırılmış grafikte önce **yatay asimptotu** bul: k orada saklıdır. Soldan sağa çıkan eğri a > 1, inen eğri 0 < a < 1 demektir.

Sık yapılan hata

Taban şartlarını (a > 0, a ≠ 1) yarıda bırakmak ve 2^x ile x^2 fonksiyonlarını aynı sanmak. Üstel fonksiyonda **değişken üstte**, kuvvet fonksiyonunda **değişken tabanda**dır.

Tuzak

- **-3^x ile $(-3)^x$ aynı değildir.** $-3^x = -(3^x)$ her zaman negatiftir ve $y = 3^x$'in x eksenine göre simetriğidir; $(-3)^x$ ise üstel fonksiyon bile değildir.
- **Azalanlık şartında alt sınırı unutmak.** $(5 - m)^x$ için yalnızca "5 - m < 1" yazmak m = 6 gibi negatif tabanları da içeri alır; doğrusu 0 < 5 - m < 1.
- **$b^2 = 9 \rightarrow b = \pm 3$.** Üstel fonksiyonun tabanı pozitif olmak zorunda; -3'ü bu gerekçeyle yazarak ele.

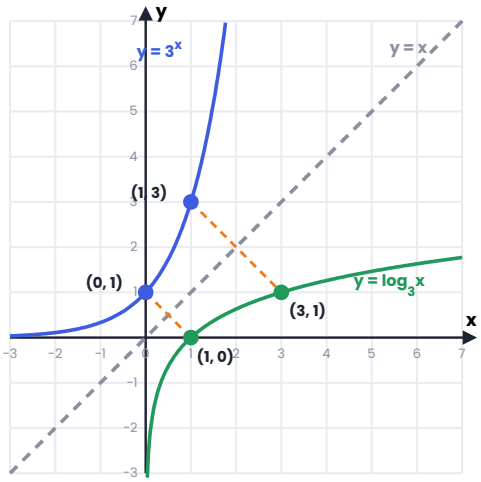
AYT bağlantısı: "Grafik hangi fonksiyona aittir?" sorularında (0, 1) noktası ve artan/azalan bilgisi çoğu zaman tek başına yeter. Kaydırılmış grafiklerde asimptot ile bir nokta, iki bilinmeyeni bulmaya yeter.

2. Logaritma ve Üstel Fonksiyonla İlişkisi

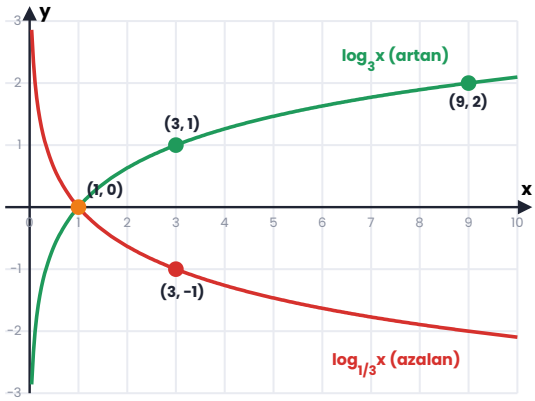
12.1.2.1 · Tanım, ters fonksiyon, tanım kümesi

$$\log_a b = c \iff a^c = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

Kısacası logaritma bir **üs bulma** işlemidir: "a'yı kaçıncı kuvvete çıkarırsam b'ye ulaşırım?" Üstel fonksiyon üssü alıp sonucu verir, logaritma sonucu alıp üssü geri verir. Bu yüzden $y = a^x$ ile $y = \log_a x$ **birbirinin ters fonksiyonudur**.



Şekil 4. $y = 3^x$ ile $y = \log_3 x$, $y = x$ doğrusuna göre simetriktir: (0, 1) ↔ (1, 0), (1, 3) ↔ (3, 1).



Şekil 5. Logaritma yalnızca $x > 0$ için tanımlıdır, (1, 0) noktasından geçer ve y eksenine yaklaşır. $\log_3 x$ ile $\log_{1/3} x$ birbirinin x eksenine göre simetriğidir.

Derinleşelim: Ters fonksiyon olmanın sonuçları

	$y = a^x$	$y = \log_a x$
Tanım kümesi	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
Görüntü kümesi	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
Sabit nokta	(0, 1)	(1, 0)
Asimptot	y = 0 (yatay)	x = 0 (dikey)

- Ters fonksiyonlar birbirinin etkisini siler: $\mathbf{a^{\log_a x} = x}$ ($x > 0$) ve $\mathbf{\log_a(a^x) = x}$ (her x için).
- Tanım kümesi ile görüntü kümesi yer değiştirir. $y = 2^{x-3} + 5$ fonksiyonunun görüntü kümesi $(5, \infty)$ ise tersi olan $\log_2(x - 5) + 3$ fonksiyonunun tanım kümesi de $(5, \infty)$ olur.
- **İşaret:** $a > 1$ iken $\log_a x$, $x > 1$ için pozitif, $0 < x < 1$ için negatiftir. $0 < a < 1$ iken işaretler tersine döner (Şekil 5).

KOLAY **Örnek 6. Değerleri bul: a) $\log_3 81$ b) $\log_2(1/16)$ c) $\log_{1/2} 8$ d) $\log_9 3$**

a) $3^4 = 81 \rightarrow$ **4** b) $2^{-4} = 1/16 \rightarrow$ **−4** c) $(1/2)^{-3} = 8 \rightarrow$ **−3** d) $9^{1/2} = 3 \rightarrow$ **1/2**

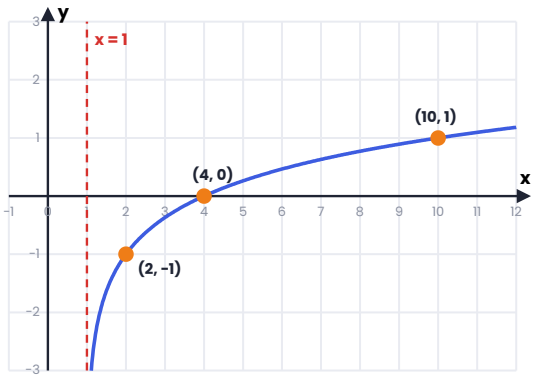
ORTA **Örnek 7. $f(x) = \log_{(x+1)}(9 - x^2)$ ifadesini tanımlı yapan tam sayıları bul.**

Taban: $x + 1 > 0$ ve $x + 1 \neq 1 \rightarrow x > -1$ ve $x \neq 0$. İçi: $9 - x^2 > 0 \rightarrow -3 < x < 3$.
Ortak çözüm: $-1 < x < 3$, $x \neq 0 \rightarrow$ tam sayılar **1 ve 2**.

ORTA **Örnek 8. $f(x) = 3^{x+2} - 1$ fonksiyonunun tersini bul. f^{-1}'in tanım kümesi nedir? $f^{-1}(80)$ kaçtır?**

$y = 3^{x+2} - 1 \rightarrow y + 1 = 3^{x+2} \rightarrow x + 2 = \log_3(y + 1) \rightarrow$ $\mathbf{f^{-1}(x) = \log_3(x + 1) - 2}$.
Tanım kümesi: $x + 1 > 0 \rightarrow$ **$(-1, \infty)$** (f'nin görüntü kümesi). $f^{-1}(80) = \log_3 81 - 2 =$ **2**. Kontrol: $f(2) = 3^4 - 1 = 80$ ✓

ZOR **Örnek 9. Şekildeki grafik $f(x) = \log_a(x - 1) + b$ fonksiyonuna aittir. a) a ve b'yi bul. b) f(28) kaçtır? c) $f^{-1}(x)$'i yaz. d) $f(x) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bul.**



Şekil 6. $y = \log_a(x - 1) + b$ grafiği: dikey asimptot x = 1; (2, -1), (4, 0) ve (10, 1) noktalarından geçiyor.

a) (2, -1): $\log_a 1 + b = -1 \to 0 + b = -1 \to$ **b = -1**. (10, 1): $\log_a 9 - 1 = 1 \to \log_a 9 = 2 \to a^2 = 9 \to$ **a = 3** (taban pozitif).
b) $f(28) = \log_3 27 - 1 = 3 - 1 =$ **2**.
c) $y = \log_3(x - 1) - 1 \to y + 1 = \log_3(x - 1) \to x = 3^{y+1} + 1 \to$ **$f^{-1}(x) = 3^{x+1} + 1$**.
d) Tanım: $x > 1$. $\log_3(x - 1) \geq 1$; taban $3 > 1$ olduğundan yön korunur: $x - 1 \geq 3 \to x \geq 4$. Çözüm: **$[4, \infty)$**. Grafikte (4, 0) noktası ve sağı.

Taktik: Logaritmayı gördüğün anda kenara üç şart yaz: **taban > 0, taban ≠ 1, içi > 0**. Puanların büyük kısmı bu üç satırda kaybedilir. Ters fonksiyon sorusunda sıra hep aynı: y'yi yaz, üslü kısmı yalnız bırak, logaritmaya çevir, en sonda x ile y'nin adını değiştir.

Sık yapılan hata

Logaritmanın **içinin** sıfır ya da negatif olabileceğini sanmak: $\log_3 0$ ve $\log_3(-9)$ **tanımsızdır**. Oysa logaritmanın **sonucu** negatif olabilir: $\log_3(1/27) = -3$.

Tuzak

- **Tabanda değişken varken "≠ 1" şartını atlamak.** Örnek 7'de x = 0 tam da bu yüzden elenir; elenmezse cevap üç tam sayı çıkar.
- **Tersin tanım kümesini yazmamak.** $f^{-1}(x) = \log_3(x + 1) - 2$ cevabı "x > -1" eklenmeden eksik sayılır.
- **$\log_a(x - 1)$ grafiğinin asimptotunu x = -1 sanmak.** Asimptot, içi sıfır yapan değerdir: $x - 1 = 0 \to x = 1$.

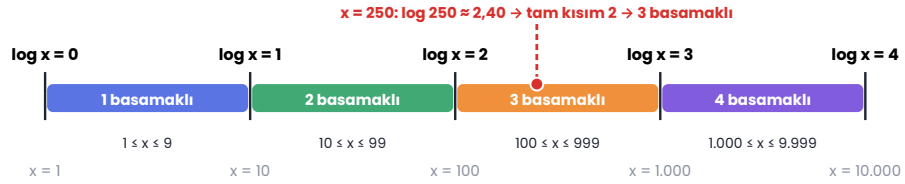
AYT bağlantısı: Grafiği verilen $\log_a(x + c) + b$ ya da $a^x + b$ sorularında iki nokta (ya da bir nokta ve asimptot) iki bilinmeyeni bulmaya yeter; soru genellikle ardından f(28) gibi bir değer ister.

3. 10 ve e Tabanında Logaritma

12.1.2.2 · log x ve ln x

Bazı tabanlar o kadar sık kullanılır ki ayrı bir yazılışları vardır:

Yazılış	Anlamı	Örnekler
log x	$\log_{10} x$ (onluk logaritma)	$\log 10\,000 = 4 \cdot \log 0{,}1 = -1 \cdot \log \sqrt{10} = 1/2$
ln x	$\log_e x$ (doğal logaritma), $e \approx 2{,}718$	$\ln e^3 = 3 \cdot \ln \sqrt{e} = 1/2 \cdot \ln 1 = 0$



Şekil 7. Onluk logaritmanın tam kısmı, sayının basamak sayısının 1 eksiğidir: log x, 2 ile 3 arasındaysa x üç basamaklıdır.

Derinleşelim: e nereden geliyor? Basamak ve ilk rakam

n (yılda ekleme sayısı)	1	2	4	12 (aylık)	365 (günlük)
$(1 + 1/n)^n$	2	2,25	2,4414...	2,6130...	2,7145...

- **e sayısı:** 1 TL'nin bir yılda %100 büyüdüğünü düşün. Büyüme yılda bir kez eklenirse yıl sonunda 2 TL olur. Aynı %100'ü n eşit parçaya bölüp n kez eklersen $(1 + 1/n)^n$ TL olur. n büyüdükçe sonuç sonsuza gitmez, bir sayıya yaklaşır: **e ≈ 2,718**.
- **Basamak ve ilk rakam:** $x > 0$ için $\log x = k + m$ (k tam sayı, $0 \le m < 1$) yazarsan $x = 10^k \cdot 10^m$ ve $1 \le 10^m < 10$ olur. $x \ge 1$ ise **basamak sayısı = k + 1**, **ilk rakam = 10^m'nin tam kısmı**. İlk rakam için m'yi $\log 2 \approx 0{,}301$, $\log 3 \approx 0{,}477$, $\log 8 \approx 0{,}903$, $\log 9 \approx 0{,}954$ gibi değerlerle karşılaştır.
- **log ile ln arasında köprü:** $\ln x = \log x / \log e \approx 2{,}303 \cdot \log x$ (taban değiştirme, Bölüm 4).

KOLAY **Örnek 10. $\log 100\,000 + \ln(1/e^3) - \log 0{,}1$ işleminin sonucunu bul.**

$\log 10^5 = 5$; $\ln e^{-3} = -3$; $\log 10^{-1} = -1$. Sonuç: $5 + (-3) - (-1) =$ **3**.

ORTA **Örnek 11. $\log 2 \approx 0{,}301$ olduğuna göre 2^{35} sayısı kaç basamaklıdır?**

$\log 2^{35} = 35 \cdot \log 2 \approx 35 \cdot 0{,}301 = 10{,}535$. Tam kısım 10 → $10^{10} \le 2^{35} < 10^{11}$ → **11 basamaklı**. (Gerçekten $2^{35} = 34\,359\,738\,368$.)

ORTA **Örnek 12. $\log 2 = a$ ve $\log 3 = b$ ise $\log 0{,}045$ ifadesini a ve b cinsinden yaz.**

$0{,}045 = 45 / 1000 = 3^2 \cdot 5 / 10^3$ ve $5 = 10 / 2$ → $\log 5 = 1 - a$.
$\log 0{,}045 = 2 \log 3 + \log 5 - 3 = 2b + (1 - a) - 3 =$ **2b − a − 2**. (Kontrol: $2 \cdot 0{,}477 - 0{,}301 - 2 \approx -1{,}347$ ve gerçekten $\log 0{,}045 \approx -1{,}347$.)

ZOR **Örnek 13. $\log 2 \approx 0{,}301$ ve $\log 3 \approx 0{,}477$ olduğuna göre 3^{25} sayısı kaç basamaklıdır ve ilk rakamı kaçtır?**

$\log 3^{25} = 25 \cdot 0{,}477 = 11{,}925$ → $k = 11$, $m \approx 0{,}925$ → **12 basamaklı**.
İlk rakam: $10^{0{,}925}$. $\log 8 = 3 \log 2 \approx 0{,}903 < 0{,}925 < 0{,}954 \approx 2 \log 3 = \log 9$ → $8 \le 10^{0{,}925} < 9$ → **ilk rakam 8**.
(Gerçekten $3^{25} = 847\,288\,609\,443$.)

Taktik: Pozitif bir tam sayının basamak sayısı = (log x'in tam kısmı) + 1. Akılda iki değer tut: **log 2 ≈ 0,301** ve **log 3 ≈ 0,477**. log 4, log 5, log 6, log 8, log 9 bunlardan türer; örneğin $\log 5 = 1 - \log 2 \approx 0{,}699$.

Sık yapılan hata

ln'i ayrı bir işlem gibi görmek. ln x yalnızca **tabanı e olan logaritmadır**; çarpım, bölüm, kuvvet ve taban değiştirme kuralları aynen geçerlidir.

Tuzak

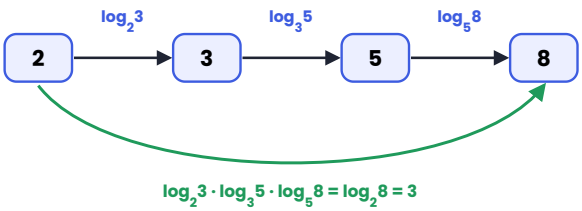
- **"+1"i atlamak:** log x = 10,535 ise sayı 10 değil **11** basamaklıdır (10^{10} zaten 11 basamaklı bir sayı).
- **m ile ilk rakamı karıştırmak:** m = 0,925 ise ilk rakam 9 değil, 8'dir; çünkü 0,925 log 9 ≈ 0,954'ten küçüktür.
- **1'den küçük sayılar:** log 0,045 ≈ -1,347; tam kısım -2, m ≈ 0,653 olur. Negatif logaritmada tam kısım bir alta yuvarlanır.

AYT bağlantısı: "Kaç basamaklıdır?", "ilk rakamı kaçtır?" ve "log 2 = a, log 3 = b ise ..." soruları AYT'de düzenli çıkar. 5 = 10/2 dönüşümü ve 10^m'yi tanıdık logaritmalarla kıyaslamak bu soruların anahtarıdır.

4. Logaritmanın Özellikleri

12.1.2.3 · İşlem kuralları

Kural	Formül	Örnek
Çarpım	$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$	log 4 + log 25 = log 100 = 2
Bölüm	$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$	$\log_3 54 - \log_3 2 = \log_3 27 = 3$
Kuvvet	$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$	$\log_2 8^5 = 5 \cdot \log_2 8 = 15$
Tabanın kuvveti	$\log_{a^m} x^n = (n/m) \cdot \log_a x$	$\log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = 3/2$
Taban değiştirme	$\log_a b = \log b / \log a$	$\log_4 32 = (5 \log 2)/(2 \log 2) = 5/2$
Ters çevirme	$\log_a b = 1 / \log_b a$	$\log_8 2 = 1/\log_2 8 = 1/3$
Üs-log yok etme	$a^{\log_a x} = x$	$3^{\log_3 11} = 11$



Şekil 8. Zincir kuralı: her halkadaki taban bir sonrakinin "içi" olunca aradakiler sadeleşir, geriye ilk taban ve son sayı kalır.

Derinleşelim: Kurallar nereden geliyor?

- **Bölüm:** $\log_a x = p$, $\log_a y = q$ ise $x/y = a^p/a^q = a^{p-q} \rightarrow \log_a(x/y) = p - q$. Üslü sayıların bölme kuralının logaritma dilidir.
- **Kuvvet:** $x = a^p$ ise $x^n = a^{np} \rightarrow \log_a x^n = n \cdot p$.
- **Ters çevirme:** taban değiştirmeden $\log_a b \cdot \log_b a = (\log b/\log a) \cdot (\log a/\log b) = 1$.
- **Yer değiştirme:** $x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$; iki tarafın $\log_b$'si de $\log_b x \cdot \log_b y$'dir.

KOLAY **Örnek 14. Hesapla: a) $\log_2 9 \cdot \log_3 8$ b) $9^{\log_3 5}$**

a) Kuvvetleri öne al: $(2 \log_2 3) \cdot (3 \log_3 2) = 6 \cdot (\log_2 3 \cdot \log_3 2) = 6 \cdot 1 =$ **6**.
b) $9^{\log_3 5} = (3^2)^{\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^2 = 5^2 =$ **25**.

ORTA **Örnek 15. log 2 = a ve log 3 = b ise log 36 ve log 75 ifadelerini a ve b cinsinden yaz.**

log 36 = log $(2^2 \cdot 3^2)$ = **2a + 2b**.
log 75 = log $(3 \cdot 5^2)$ = log 3 + 2 log 5 = b + 2(1 - a) = **b + 2 - 2a**. (Püf: log 5 = log (10/2) = 1 - a.)

ORTA **Örnek 16. Hesapla: a) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \ldots \cdot \log_{80} 81$ b) $\log_2(1 + 1/1) + \log_2(1 + 1/2) + \log_2(1 + 1/3) + \ldots + \log_2(1 + 1/31)$**

a) Zincir kuralı ortadaki bütün tabanları siler: sonuç $\log_3 81$ = **4**.
b) 1 + 1/k = (k + 1)/k. Çarpım kuralı: $\log_2[(2/1) \cdot (3/2) \cdot (4/3) \cdot \ldots \cdot (32/31)] = \log_2 32$ = **5** (ardışık pay ve paydalar sadeleşir).

ZOR **Örnek 17. $\log_3 2 = a$ ve $\log_2 5 = b$ olduğuna göre $\log_{18} 40$ ifadesini a ve b cinsinden yaz.**

Her şeyi 3 tabanına taşı: $\log_3 5 = \log_3 2 \cdot \log_2 5 = ab$ (zincir).
$\log_{18} 40 = \log_3 40 / \log_3 18 = (3 \log_3 2 + \log_3 5) / (\log_3 2 + 2 \log_3 3)$ = **(3a + ab) / (a + 2)**.
Kontrol: a ≈ 0,631, b ≈ 2,322 → (1,893 + 1,465)/2,631 ≈ 1,276 ve gerçekten $\log_{18} 40 \approx 1{,}276$ ✓

ZOR **Örnek 18. $\log_2 x \cdot \log_x 3 \cdot \log_3 y = 4$ ve $\log_y x = 1/2$ olduğuna göre x ve y'yi bul. Çözümde hangi şartları kontrol etmelisin?**

Şartlar: x, y > 0; x ≠ 1, y ≠ 1 (ikisi de taban olarak geçiyor).
Zincir kuralı: $\log_2 x \cdot \log_x 3 \cdot \log_3 y = \log_2 y = 4 \rightarrow$ **y = 16**. $\log_{16} x = 1/2 \rightarrow x = 16^{1/2} \rightarrow$ **x = 4**.
Kontrol: 4 ve 16 pozitif, 1'den farklı ✓; $\log_2 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 16 = \log_2 16 = 4$ ✓

Taktik: İçinde 5 geçen her ifadede **5 = 10/2** dönüşümünü dene. Farklı tabanlar varsa hepsini tek bir tabana (çoğu zaman 2, 3 ya da 10) çevir; zincir kuralı aradaki tabanları kendiliğinden siler.

Sık yapılan hata

- log (x + y) = log x + log y yazmak. Kural **çarpım** için geçerli, toplam için değil.
- $(\log x)^2$ ile $\log x^2$ ifadelerini karıştırmak: $\log x^2 = 2 \log |x|$, ama $(\log x)^2 = \log x \cdot \log x$.

Tuzak

- **$\log x^2 = 2 \log x$ her zaman doğru değildir.** Doğrusu $\log x^2 = 2 \log |x|$ ($x \neq 0$). $\log x^2 = 4$ denkleminin çözümü x = ±100; 2 log x = 4 denkleminin çözümü ise yalnızca x = 100. Dönüşüm sırasında kök kaybedebilirsin.
- **$\log_a x / \log_a y \neq \log_a(x/y)$.** Bölüm, taban değiştirme kuralına göre $\log_y x$'e eşittir.
- **Değişken tabanlı ifadede şartları unutmak.** Örnek 18'de x = 1 ya da y = 1 çıksaydı cevap kabul edilmezdi.

AYT bağlantısı: Zincir kuralı ve $a^{\log_a x} = x$, uzun görünen soruları tek satıra indirir. Tabanlar farklıysa önce hepsini aynı sayının kuvveti olarak yaz ($9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $16 = 2^4$).

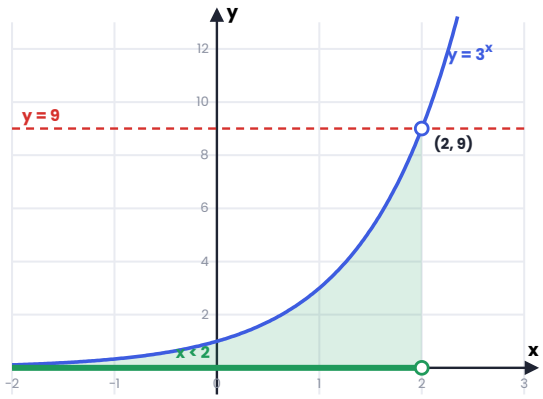
5. Üstel ve Logaritmik Denklemler, Eşitsizlikler

12.1.3.1 · Tabanları eşitle, değişken değiştir, tanım kümesini kontrol et

Denklemler: 4 temel hamle

Hamle	Örnek ve çözüm
1. Tabanları eşitle	$9^{x-1} = 27^x \rightarrow 3^{2x-2} = 3^{3x} \rightarrow 2x - 2 = 3x \rightarrow$ **x = -2**
2. Değişken değiştir	$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$. $2^x = t$ $(t > 0)$: $t^2 - 5t + 4 = 0 \rightarrow t = 1$ veya $t = 4 \rightarrow$ **x = 0 veya x = 2**
3. Logaritma al	$2^x = 7 \rightarrow$ **$x = \log_2 7$** (tabanlar eşitlenemiyorsa)
4. Tek logaritmaya topla	$\log_3 x + \log_3(x - 8) = 2 \rightarrow x(x - 8) = 9 \rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \rightarrow x = 9$ veya $x = -1$. Tanım kümesi $x > 8 \rightarrow$ **yalnızca x = 9**

Eşitsizlikler: Taban yönü belirler



Şekil 9. $3^x < 9$: eğrinin y = 9 doğrusunun altında kaldığı x değerleri, yani $x < 2$ ($x = 2$ dahil değil).

Taban	Eşitsizlik yönü
a > 1	Korunur: $3^{x+1} \geq 27 = 3^3 \rightarrow x + 1 \geq 3 \rightarrow$ **$x \geq 2$**
0 < a < 1	Değişir: $(1/2)^x > 4 = (1/2)^{-2} \rightarrow$ **$x < -2$**

Derinleşelim: Neden işe yarıyor, kök nerede kaybolur?

- **Eşitlikte:** a^x ve $\log_a x$ bire birdir; aynı çıktıyı yalnızca aynı girdi verir. "Tabanları eşitle" ve "logaritma içlerini eşitle" hamleleri bu yüzden güvenlidir.
- **Eşitsizlikte:** $a > 1$ iken fonksiyon artandır ve sırayı korur; $0 < a < 1$ iken azalandır ve sırayı **ters çevirir**.
- **Yabancı kök:** $\log A + \log B = \log(AB)$ dönüşümü tanım kümesini genişletir; A ve B ikisi de negatifken AB pozitif olabilir. Bulduğun her kökü **asıl denklemde** kontrol et.
- **Kayıp kök:** $\log x^2 = 2 \log x$ dönüşümü tanım kümesini daraltır, $x < 0$ olan kökler kaybolur. Böyle dönüşümlerde $|x|$ yaz.
- **x hem tabanda hem üste:** $x^{\log_2 x}$ gibi ifadelerde iki tarafın $\log_2$'sini al; $\log_2 x = t$ yazınca ikinci dereceden denklem çıkar.

KOLAY **Örnek 19. $3^{x+2} - 3^x = 72$ denklemini çöz.**

3^x ortak parantezine al: $3^x \cdot (9 - 1) = 72 \rightarrow 3^x \cdot 8 = 72 \rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \rightarrow$ **$x = 2$**.

ORTA **Örnek 20. $\log_{1/3}(2x-1) \geq -2$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bul.**

Tanım: $2x-1>0 \to x>1/2$.
$-2=\log_{1/3}9$ olduğundan $\log_{1/3}(2x-1) \geq \log_{1/3}9$. Taban $1/3<1$ → yön değişir: $2x-1 \leq 9 \to x \leq 5$.
Ortak çözüm: $1/2<x \leq 5$, yani **(1/2, 5]**.

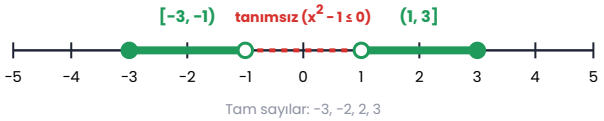
ORTA **Örnek 21. $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \leq 0$ eşitsizliğini çöz.**

$4 \cdot 3^{x+1} = 12 \cdot 3^x$. $3^x = t$ ($t>0$): $t^2 - 12t + 27 \leq 0 \to (t-3)(t-9) \leq 0 \to 3 \leq t \leq 9$.
$3 \leq 3^x \leq 9$ → taban $3>1$, yön korunur: **$1 \leq x \leq 2$**, yani $[1, 2]$.

ZOR **Örnek 22. $x^{\log_2 x} = 8x^2$ denkleminin çözüm kümesini bul.**

Tanım: $x>0$. İki tarafın 2 tabanında logaritmasını al: $\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 8 + 2\log_2 x$. $\log_2 x = t$: $t^2 - 2t - 3 = 0 \to (t-3)(t+1)=0 \to t=3$ veya $t=-1 \to x=8$ veya $x=1/2$.
Kontrol: $8^3 = 512 = 8 \cdot 64$ ✓; $(1/2)^{-1} = 2 = 8 \cdot (1/4)$ ✓. **Ç = {1/2, 8}**.

ZOR **Örnek 23. $\log_2(x^2-1) \leq 3$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerini bul. Kaç tam sayı bu eşitsizliği sağlar? Bu tam sayıların toplamı kaçtır?**



Şekil 10. Dolu nokta: dahil, boş nokta: dahil değil. -1 ile 1 arası tanım kümesinde olmadığı için atılır.

Tanım: $x^2-1>0 \to x<-1$ veya $x>1$.
$3=\log_2 8$. Taban $2>1$ → yön korunur: $x^2-1 \leq 8 \to x^2 \leq 9 \to -3 \leq x \leq 3$.
Kesişim: **$[-3,-1) \cup (1,3]$**. Tam sayılar: $-3, -2, 2, 3$ → **4 tane**, toplamları **0**. (-1, 0 ve 1'de $x^2-1 \leq 0$ olduğu için logaritma tanımsız.)

Taktik: Üç adımlı kontrol. 1) Önce tanım kümesini yaz. 2) Tabanları eşitle ve çöz; taban 1'den küçükse eşitsizliği çevir. 3) Bulduğun cevabı tanım kümesiyle kesiştir. Yazılıda 3. adımı ayrıca yazmak çoğu zaman ayrı puan getirir.

Sık yapılan hata

- Logaritmik denklemde bulduğun kökü tanım kümesine sokmadan cevaba yazmak (tablodaki $x=-1$ gibi).
- $t=3^x$ dönüşümünde $t>0$ olduğunu unutup negatif t'den x aramak.
- Tabanı 1'den küçük eşitsizlikte yönü çevirmemek.

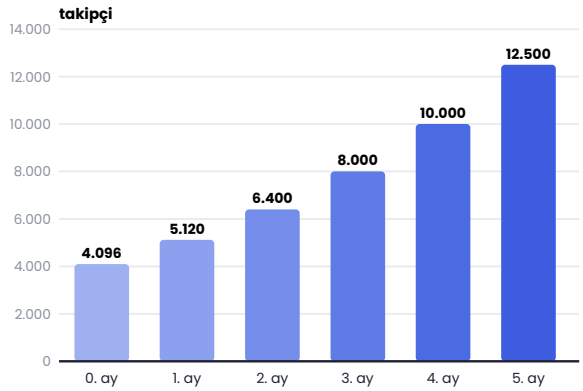
Tuzak

- **Tanım kümesini sona bırakıp unutmak.** Örnek 23'te yalnızca $-3 \leq x \leq 3$ yazan öğrenci -1, 0 ve 1'i de sayar ve 7 tam sayı bulur.
- **Uç noktalar.** Tanım kümesinden gelen uçlar her zaman açıktır ($x^2-1>0$); eşitsizlikten gelen uçlar $\leq$ ya da $\geq$ varsa kapalıdır.
- **Yönü iki kez çevirmek.** Taban 1/3 iken yön, logaritmadan kurtulurken yalnızca **bir kez** değişir.

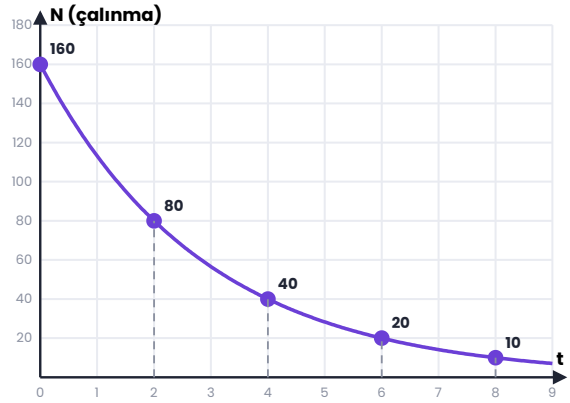
AYT bağlantısı: Bu konu AYT'de çoğunlukla "çözüm kümesinin elemanları toplamı" ya da "kaç tam sayı" biçiminde sorulur. İki durumda da sonucu tanım kümesiyle kesişim belirler.

6. Gerçek Hayat Modelleri

12.1.3.2 · Faiz, büyüme, yarılanma, pH, ses, deprem

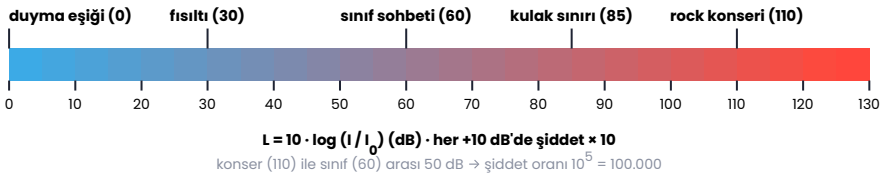


Şekil 11. Okul korosunun video kanalı 4.096 takipçiyle başlıyor ve her ay %25 büyüyor: her çubuk bir öncekinin 1,25 katı.



Şekil 12. Bir şarkının radyoda haftalık çalınma sayısı her 2 haftada yarıya iniyor: $N(t) = 160 \cdot (1/2)^{t/2}$ (t hafta).

Model	Formül	Örnek
Bileşik faiz / yüzde büyüme	$A = P \cdot (1 + r)^t$	8.000 TL, yıllık %25, 2 yıl: $8.000 \cdot 1{,}25^2$ = **12.500 TL**
Yarılanma	$m(t) = m_0 \cdot (1/2)^{t/T}$	120 g, T = 6 yıl, 18 yıl sonra: $120 \cdot (1/2)^3$ = **15 g**
pH	$pH = -\log [H^+]$	$[H^+] = 10^{-5}$ → **pH = 5**
Ses düzeyi (desibel)	$L = 10 \cdot \log (I / I_0)$	Şiddet 1000 katına çıkarsa L, $10 \cdot \log 1000$ = **30 dB** artar.
Deprem (Richter)	$M = \log (A / A_0)$	Büyüklük 2 artarsa dalga genliği 10^2 = **100 kat** artar.



Şekil 13. Desibel ölçeği logaritmiktir: 10 dB'lik her adım ses şiddetini 10 ile çarpar. Rock konseri, sınıf sohbetinden 50 dB yüksek, yani 100.000 kat daha şiddetli.

Derinleşelim: Bütün modeller aynı kalıptan

- **Üstel model:** $N(t) = N_0 \cdot b^{t/T}$. N_0 başlangıç değeri, T bir "adım"ın süresi, b her adımdaki çarpan. Yüzde büyümede b = 1 + r, yarılanmada b = 1/2, katlanmada b = 2 ya da 3.
- **Yüzdeler toplanmaz, çarpılır:** %25 artış → çarpan 1,25; %20 azalış → çarpan 0,8. Art arda ikisi: 1,25 · 0,8 = 1, yani tam başa dönülür. Oysa %20 artış ve %20 azalış 1,2 · 0,8 = 0,96 verir.
- **Katlanma süresi başlangıca bağlı değildir:** $N_0 \cdot b^t = 2N_0 \rightarrow b^t = 2$. 500 takipçili kanal da 50.000 takipçili kanal da aynı oranla büyüyorsa aynı sürede ikiye katlanır.
- **Logaritmik ölçekler** (pH, dB, Richter) dev aralıkları küçük sayılara sıkıştırır: ölçekte 1 birim (dB'de 10 birim) artış, gerçek büyüklükte 10 kat artış demektir. Bu yüzden bu ölçeklerdeki değerler doğrudan toplanmaz.

KOLAY **Örnek 24. Bir rock konserinde ses düzeyi 110 dB, sınıftaki normal sohbet 60 dB. Konserin ses şiddeti sohbetin kaç katıdır? Şiddeti $I = 10^7 \cdot I_0$ olan bir ses kaç dB'dir?**

110 − 60 = 50 dB = 5 · 10 dB → şiddet oranı 10^5 = **100.000 kat**.
$L = 10 \cdot \log 10^7 = 10 \cdot 7$ = **70 dB**.

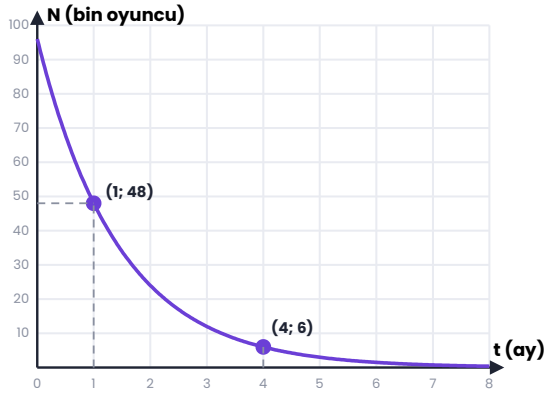
ORTA **Örnek 25. Okulun müzik kulübü 8.000 TL'yi yıllık %25 bileşik faizle yatırıyor. Birikim ilk kez kaçıncı yılın sonunda 20.000 TL'yi geçer? (log 2 ≈ 0,301, log 5 ≈ 0,699)**

$8.000 \cdot 1{,}25^t > 20.000 \rightarrow 1{,}25^t > 2{,}5$.
log 1,25 = log (5/4) = 0,699 − 0,602 = 0,097; log 2,5 = log (5/2) = 0,699 − 0,301 = 0,398.
$t > 0{,}398 / 0{,}097 \approx 4{,}10$. Faiz yıl sonunda işlendiği için **5. yılın sonunda** geçer. (Kontrol: 4. yıl 19.531,25 TL; 5. yıl ≈ 24.414 TL.)

ORTA **Örnek 26. Bir çevrim içi satranç turnuvasına kayıtlı oyuncu sayısı 40 ile başlıyor ve her 3 günde 3 katına çıkıyor. a) 12 gün sonra kaç oyuncu olur? b) Kaç gün sonra kayıtlı oyuncu sayısı 29.160 olur?**

$N(t) = 40 \cdot 3^{t/3}$ (t gün). a) $t = 12 \rightarrow 3^4 = 81 \rightarrow 40 \cdot 81$ = **3.240 oyuncu**.
b) $3^{t/3} = 29.160 / 40 = 729 = 3^6 \rightarrow t/3 = 6 \rightarrow$ **t = 18 gün**.

ZOR **Örnek 27. Yeni çıkan bir mobil oyunun aylık aktif oyuncu sayısı $N(t) = N_0 \cdot a^t$ modeline uyuyor (t ay, N bin oyuncu). Grafikte t = 1'de 48 bin, t = 4'te 6 bin oyuncu okunuyor. a) a ve N_0'ı bul. b) Oyuncu sayısı ilk kez hangi tam ayda 1.000'in altına düşer? (log 2 ≈ 0,301, log 3 ≈ 0,477)**



Şekil 14. Aktif oyuncu sayısı $N(t) = N_0 \cdot a^t$ modeline uyuyor; grafikten iki nokta okunuyor.

a) Oranla: $N(4)/N(1) = a^3 = 6/48 = 1/8 \rightarrow$ **a = 1/2** (her ay yarıya iniyor). $N_0 \cdot (1/2) = 48 \rightarrow$ **N_0 = 96 bin**.
b) $96.000 \cdot 2^{-t} < 1.000 \rightarrow 2^t > 96$. $t > \log 96 / \log 2 = (5 \cdot 0{,}301 + 0{,}477)/0{,}301 \approx 6{,}58$.
Tam ay kontrolü: t = 6 → 96.000/64 = 1.500 (henüz değil); t = 7 → 96.000/128 = 750 → **ilk kez 7. ayda**.

ZOR **Örnek 28. Okul orkestrasında tek bir keman 60 dB ses çıkarıyor. a) Aynı şiddette çalan kaç keman 70 dB'e ulaşır? Bir öğrenci "10 dB fazlası için bir keman daha yeter" diyor; neden yanlış? b) 20 keman birlikte çalınca ses düzeyi yaklaşık kaç dB olur? (log 2 ≈ 0,301)**

a) Ses düzeyleri değil **şiddetler toplanır**: n keman → şiddet nI. $L = 10 \cdot \log (nI / I_0) = 10 \cdot \log n + 60$. 70 dB için $10 \cdot \log n = 10 \rightarrow$ **n = 10 keman**. İki keman yalnızca $10 \cdot \log 2 \approx 3$ dB ekler (≈ 63 dB); 10 dB artış için şiddetin 10 katına çıkması gerekir.
b) $L = 60 + 10 \cdot \log 20 = 60 + 10 \cdot (1 + 0{,}301) \approx$ **73 dB**.

Taktik: Model sorularında önce formüldeki her harfin karşılığını kenara yaz (başlangıç, çarpan, adım süresi). "Ne zaman?" sorulursa iki tarafın logaritmasını al, sonucu bağlama göre yuvarla ve **tam değerlerle kontrol et** (t = 6 ve t = 7'yi yerine koymak gibi).

Sık yapılan hata

Yüzdeyi olduğu gibi formüle koymak: %25 büyüme formülde 0,25 olarak yazılır ve çarpan 1 + 0,25 = **1,25** olur. Çarpanı 25 ya da 0,25 almak sonucu tamamen bozar.

Tuzak

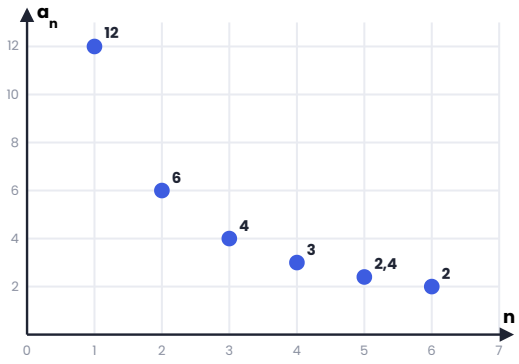
- **Birim uyuşmazlığı:** Katlanma süresi gün, soru hafta cinsinden ise önce birimleri eşitle; t/T oranında ikisi aynı birimde olmalı.
- **"3 yarılanma = 1/6" sanmak:** 3 yarılanmadan sonra kalan $(1/2)^3 = 1/8$'dir.
- **Yuvarlama yönü:** "İlk kez ne zaman geçer?" sorusunda 4,10 yıl → 5. yıl (yukarı); "en çok kaç tam yıl bekleyebilir?" sorusunda aşağı yuvarlanır.

AYT bağlantısı: Model sorularında AYT çoğunlukla iki veriden a ve N_0'ı bulmanı (iki değeri birbirine bölme hilesi) ve ardından bir eşik zamanını sorar.

7. Diziler

12.2.1.1–12.2.1.4 · 3–8. senaryolarda var

Tanım kümesi pozitif doğal sayılar (1, 2, 3, …) olan fonksiyonlara **dizi** denir. Dizinin n. terimine **genel terim** denir ve a_n ile gösterilir.



Şekil 15. $a_n = 12/n$ dizisinin grafiği: yalnızca n = 1, 2, 3, … için ayrık noktalar. n doğal sayı olduğu için noktalar birleştirilmez.

KOLAY **Örnek 29. $a_n = n^2 + 2n$ dizisinde a_3 kaçtır? 120 bu dizinin kaçıncı terimidir?**

$a_3 = 9 + 6 =$ **15**. $n^2 + 2n = 120 \rightarrow n^2 + 2n - 120 = 0$ → $(n + 12)(n - 10) = 0$ → **n = 10** (n pozitif).

KOLAY **Örnek 30. $a_n = \log_2(n - 1)$ bir dizi midir?**

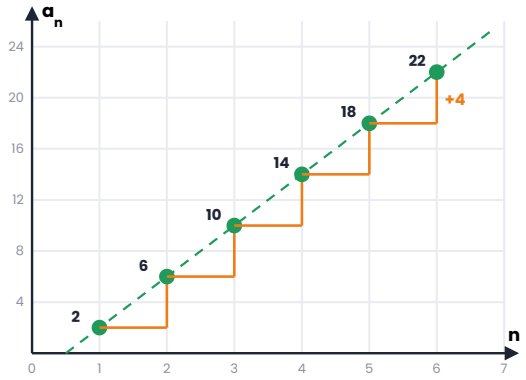
n = 1 için $\log_2 0$ tanımsız. Her pozitif doğal sayıda tanımlı olmadığından **dizi değildir**.

İndirgeme bağıntısı: Bir terimin kendinden önceki terim(ler) cinsinden verilmesidir. Örnek: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n + 1) \cdot a_n \rightarrow a_2 = 2 \cdot 1 = 2$, $a_3 = 3 \cdot 2 = 6$, $a_4 = 4 \cdot 6 = 24$.

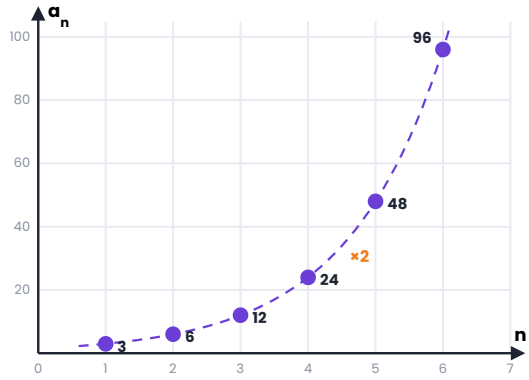
ZOR **Örnek 31. $a_1 = 1$ ve $a_{n+1} = 2a_n + 3$ bağıntısıyla verilen dizinin ilk 5 terimini yaz, genel terimini tahmin et ve tahminin neden doğru olduğunu göster. a_{10} kaçtır?**

İlk terimler: 1, 5, 13, 29, 61. Her birine 3 eklersen 4, 8, 16, 32, 64 çıkar → tahmin $\mathbf{a_n = 2^{n+1} - 3}$.
Gerekçe: $b_n = a_n + 3$ olsun. $b_{n+1} = a_{n+1} + 3 = 2a_n + 6 = 2b_n \rightarrow (b_n)$ ortak çarpanı 2 olan geometrik dizi, $b_1 = 4$ → $b_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \rightarrow a_n = 2^{n+1} - 3$. $a_{10} = 2^{11} - 3 =$ **2045**.

Aritmetik ve geometrik dizi

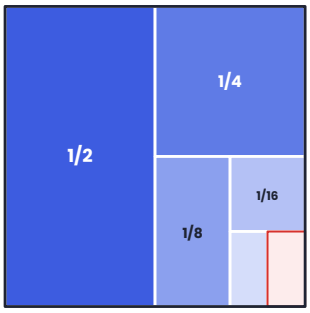


Şekil 16. Aritmetik dizi ($a_1 = 2$, $d = 4$): her adımda aynı sayı eklenir; noktalar bir doğru üzerinde dizilir.



Şekil 17. Geometrik dizi ($a_1 = 3$, $r = 2$): her adımda aynı sayıyla çarpılır; büyüme üstel fonksiyon gibidir.

	Aritmetik dizi (ortak fark d)	Geometrik dizi (ortak çarpan r)
Genel terim	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$	$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
İki terim	$a_m - a_k = (m - k) \cdot d$	$a_m / a_k = r^{m-k}$
Ortanca terim	$a_k = (a_{k-p} + a_{k+p}) / 2$	$a_k^2 = a_{k-p} \cdot a_{k+p}$
İlk n terim toplamı	$S_n = n \cdot (a_1 + a_n) / 2$	$S_n = a_1 \cdot (r^n - 1) / (r - 1)$, $r \neq 1$



Şekil 18. Alanı 1 olan kareyi sürekli ikiye böl: 1/2 + 1/4 + … + 1/32, kareden geriye kalan 1/32 çıkarılınca bulunur. Geometrik toplam formülü de aynı sonucu verir.

Derinleşelim: Formüllerin arkası

- **Aritmetik toplam:** Toplamı bir de tersten yaz, alt alta topla: her sütun $a_1 + a_n$, n sütun var → $2S_n = n(a_1 + a_n)$.
- **Geometrik toplam:** $S = a_1 + a_1r + \ldots + a_1r^{n-1}$. rS'den S'yi çıkar: ortadakiler gider, $rS - S = a_1r^n - a_1$.
- **Tanıma testi:** Aritmetik dizide $a_n = dn + c$ (n'ye göre doğrusal) ve $S_n = An^2 + Bn$ (sabit terim yok). Geometrik dizide $S_n = c \cdot r^n - c$ biçimindedir.
- **S_n'den a_n:** $n \geq 2$ için $a_n = S_n - S_{n-1}$; $a_1 = S_1$ ayrıca kontrol edilir.

ORTA **Örnek 32. Bir aritmetik dizide $a_5 = 17$ ve $a_{12} = 45$ ise a_{30} ve ilk 30 terimin toplamı kaçtır?**

$7d = 45 - 17 = 28 \rightarrow d = 4$, $a_1 = 17 - 4 \cdot 4 = 1$. $a_{30} = 1 + 29 \cdot 4 = \mathbf{117}$. $S_{30} = 30 \cdot (1 + 117) / 2 = \mathbf{1770}$.

ORTA **Örnek 33. Bir geometrik dizide $a_3 = 12$ ve $a_6 = 96$ ise ilk 6 terimin toplamı kaçtır?**

$r^3 = 96 / 12 = 8 \rightarrow r = 2$, $a_1 = 12 / 4 = 3$. $S_6 = 3 \cdot (2^6 - 1) / (2 - 1) = \mathbf{189}$. (Kontrol: 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189; Şekil 17.)

KOLAY **Örnek 34 (problem). Bir atlet antrenmanın ilk günü 800 m koşuyor ve her gün bir önceki günden 200 m fazla koşuyor. 12. gün kaç metre koşar? 12 günde toplam kaç metre koşmuş olur?**

$a_{12} = 800 + 11 \cdot 200 =$ **3000 m**. Toplam $= 12 \cdot (800 + 3000) / 2 =$ **22.800 m** (22,8 km).

ORTA **Örnek 35 (problem). 128 oyunculu tek eleme usulü bir satranç turnuvasında her turda oyuncuların yarısı elenir. a) 4. turda kaç oyuncu masaya oturur? b) Şampiyon belli olana kadar toplam kaç maç oynanır?**

a) Turlardaki oyuncu sayıları geometrik dizi: $128 \cdot (1/2)^{n-1}$. n = 4: 128 / 8 = **16 oyuncu**.
b) Maç sayıları 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 (7 tur): $S_7 = 64 \cdot (1 - (1/2)^7) / (1 - 1/2) =$ **127 maç**. (Kısa yol: her maçta tam bir oyuncu elenir; 127 oyuncu elenmeli.)

ZOR **Örnek 36. Bir dizinin ilk n teriminin toplamı $S_n = 2n^2 - n$'dir. a) Genel terimi bul; dizi aritmetik mi? b) a_{15} kaçtır? c) İlk n terim toplamı $T_n = 3^n - 1$ olan dizi hangi türdendir?**

a) $n \geq 2$: $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - n - 2(n-1)^2 + (n-1) = 4n - 3$. $a_1 = S_1 = 1 = 4 \cdot 1 - 3$ ✓ → **$a_n = 4n - 3$**; ardışık farklar sabit (4) → **aritmetik**.
b) $a_{15} = 60 - 3 =$ **57**.
c) $n \geq 2$: $b_n = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) = 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$; $b_1 = T_1 = 2 = 2 \cdot 3^0$ ✓ → **geometrik dizi** ($b_1 = 2$, $r = 3$).

Taktik: Aritmetik dizide toplamı hızlı bulmak için **terim sayısı × ortadaki terim**: 2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 5 · 10 = 50. Geometrik dizide iki terim verildiyse önce bölerek r'yi bul: $a_6 / a_3 = r^3$.

! Sık yapılan hata

- Genel terimde (n - 1) yerine n yazmak: $a_{12} = a_1 + 11d$'dir, 12d değil.
- Dizi grafiğinde noktaları çizgiyle birleştirmek.
- Geometrik dizide ortak çarpanı fark gibi kullanmak (3, 6, 12 dizisinde "her adımda +3").

! Tuzak

- **$a_n = S_n - S_{n-1}$ formülünü n = 1 için de kullanmak.** S_0 diye bir toplam yoktur; $a_1 = S_1$ ayrıca hesaplanıp genel terimle karşılaştırılmalı.
- **$r^2 = 4 \rightarrow r = 2$ deyip -2'yi atmak.** Terimlerin işareti verilmemişse iki durum da incelenmeli; üstel fonksiyonun aksine dizide r negatif olabilir.
- **Terim sayısını yanlış saymak:** a_8'den a_{20}'ye kadar 13 terim vardır (20 - 8 + 1).

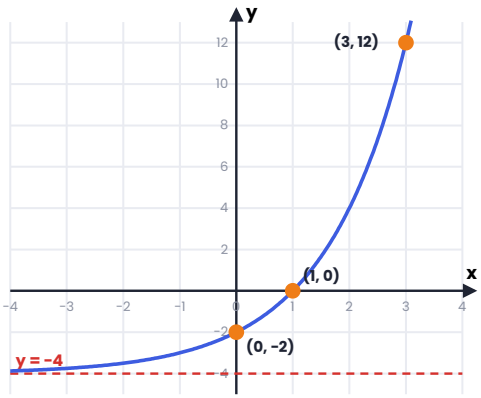
AYT bağlantısı: "Eşit aralıklarla artıyor" ifadesi aritmetik dizi, "her seferinde yüzde … artıyor/azalıyor" ya da "yarıya iniyor" ifadesi geometrik dizi demektir. S_n verilen sorularda $S_n - S_{n-1}$ ve S_1 kontrolü neredeyse hep sorulur.

90+ Atölyesi

Kapsamı tarayan 8 zor problem · Önce kendin dene, sonra çözümü oku

Bu problemler yazılının en zorlu sorularıyla aynı dili konuşuyor: birkaç adım, grafik okuma, tanım kümesi kontrolü ve "neden?" sorusu. Her çözümün sonunda **puan kaybettiren nokta** var; 90 ile 100 arasındaki fark çoğu zaman tam orada saklı.

Problem 1. Şekildeki grafik $f(x) = 2^{x+a} + b$ fonksiyonuna aittir (kesikli doğru asimptot). a) a ve b'yi bul. b) Grafiğin x eksenini kestiği noktayı bul. c) $f^{-1}(x)$'i ve tanım kümesini yaz; $f^{-1}(28)$ kaçtır? d) $f(x) \le 12$ eşitsizliğini çöz.



90+ Atölyesi, Problem 1: $y = 2^{x+a} + b$ grafiği.

a) Asimptot $y = -4 \to$ **$b = -4$** ($2^{x+a} > 0$ olduğundan $f(x) > b$). $(0, -2)$: $2^a - 4 = -2 \to 2^a = 2 \to$ **$a = 1$**.
b) $2^{x+1} = 4 = 2^2 \to x + 1 = 2 \to$ **$(1, 0)$**.
c) $y = 2^{x+1} - 4 \to x + 1 = \log_2(y + 4) \to$ **$f^{-1}(x) = \log_2(x + 4) - 1$**, tanım kümesi **$(-4, \infty)$**. $f^{-1}(28) = \log_2 32 - 1 =$ **4**.
d) $2^{x+1} - 4 \le 12 \to 2^{x+1} \le 16 = 2^4 \to$ taban $2 > 1$, yön korunur: $x + 1 \le 4 \to$ **$x \le 3$**, yani $(-\infty, 3]$. Grafikte $(3, 12)$ noktası ve solu.

Puan kaybettiren nokta: Asimptottan b'yi okurken işareti karıştırmak ($b = 4$ yazmak) ya da f^{-1}'in tanım kümesini yazmamak; d şıkkında uç noktayı açık bırakmak.

Problem 2. $\log 2 \approx 0{,}301$ ve $\log 3 \approx 0{,}477$ alınarak 12^{15} sayısının a) kaç basamaklı olduğunu, b) ilk rakamını bul. c) 12^{15} ile 3^{34} sayılarından hangisi büyüktür?

a) $\log 12 = 2 \log 2 + \log 3 \approx 1{,}079$. $\log 12^{15} \approx 15 \cdot 1{,}079 = 16{,}185 \to k = 16 \to$ **17 basamaklı**.
b) $m \approx 0{,}185$. $\log 1 = 0 < 0{,}185 < 0{,}301 \approx \log 2 \to 1 \le 10^{0{,}185} < 2 \to$ **ilk rakam 1**. (Gerçekten $12^{15} = 15\,407\,021\,574\,586\,368$.)
c) $\log 3^{34} = 34 \cdot 0{,}477 = 16{,}218 > 16{,}185 \to$ **3^{34} daha büyük** (log artan bir fonksiyon). İkisi de 17 basamaklı ve ikisinin de ilk rakamı 1; fark ancak m değerlerinde görünür: $0{,}218 > 0{,}185$.

Puan kaybettiren nokta: c şıkkında "basamak sayısı ve ilk rakam aynı, sayılar eşit" demek. Karşılaştırmayı logaritmanın tamamıyla (16,218 ile 16,185) yapmak gerekir.

Problem 3. $3^x \cdot 9^y = 3^7$ ve $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 6$ denklem sistemini çöz.

Tanım: $x > 0$, $y > 0$.
1. denklem: $3^{x+2y} = 3^7 \to x + 2y = 7$. 2. denklem: $\log_2(xy) = \log_2 6 \to xy = 6$.
$x = 7 - 2y \to (7 - 2y)y = 6 \to 2y^2 - 7y + 6 = 0 \to (2y - 3)(y - 2) = 0 \to y = 2$ veya $y = 3/2$.
$y = 2 \to x = 3$; $y = 3/2 \to x = 4$. İkisinde de $x, y > 0$ ✓ → **$Ç = \{(3, 2), (4, 3/2)\}$**. Kontrol: $3^4 \cdot 9^{3/2} = 81 \cdot 27 = 3^7$ ✓

Puan kaybettiren nokta: 9^y'yi 3^{2y} yazmayı unutmak ya da kesirli çıkan ikinci çözümü "olmaz" diye atmak. Tanım kümesi yalnızca pozitiflik ister, tam sayı istemez.

Problem 4. $\log_3(x-1) \le \log_9(x+5)$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerini bul. Bu aralıkta kaç tam sayı vardır?

Tanım: $x - 1 > 0$ ve $x + 5 > 0 \rightarrow x > 1$.
Tabanları eşitle: $\log_9(x+5) = \frac{1}{2}\log_3(x+5)$. Eşitsizlik: $2\log_3(x-1) \le \log_3(x+5) \rightarrow \log_3(x-1)^2 \le \log_3(x+5)$.
Taban 3 > 1, yön korunur: $(x-1)^2 \le x+5 \rightarrow x^2 - 3x - 4 \le 0 \rightarrow (x-4)(x+1) \le 0 \rightarrow -1 \le x \le 4$.
Kesişim: **(1, 4]**; tam sayılar 2, 3, 4 → **3 tane**. Kontrol ($x = 4$): $\log_3 3 = 1 = \log_9 9$ ✓

Puan kaybettiren nokta: $\log_9$'u $\log_3$'e çevirirken ½ katsayısını unutmak ya da kesişimde $-1 \le x \le 1$ kısmını atmamak ($x > 1$ şartı).

Problem 5. Okul kütüphanesinin e-kitap ödünç sayısı ayda 150 ile başlıyor ve her 4 ayda iki katına çıkıyor. a) Aylık ödünç sayısını t aya bağlı bir fonksiyonla yaz. b) 1 yıl sonra ayda kaç e-kitap ödünç alınır? c) Aylık ödünç sayısı yaklaşık kaç ay sonra 10.000'i geçer? ($\log 2 \approx 0{,}301$, $\log 3 \approx 0{,}477$) d) Müdür "2 yılın sonunda ayda 10.000 ödünce ulaşırız" diyor. Model bu hedefi destekliyor mu?

a) $\mathbf{N(t) = 150 \cdot 2^{t/4}}$ (t ay).
b) 12 ay = 3 katlanma: $150 \cdot 2^3 =$ **1.200**.
c) $150 \cdot 2^{t/4} > 10.000 \rightarrow 2^{t/4} > 200/3 \rightarrow t/4 > \log(200/3) / \log 2 = (2 + 0{,}301 - 0{,}477)/0{,}301 \approx 6{,}06 \rightarrow$ **t > 24,2 ay** (yaklaşık 25. ayda).
d) $N(24) = 150 \cdot 2^6 = 9.600 < 10.000 \rightarrow$ **desteklemiyor**; 24. ayın sonunda hedefe 400 ödünç kalıyor, eşik 25. ayda aşılıyor.

Puan kaybettiren nokta: t/4 yerine t yazmak (her ay katlanma sanmak) ya da $\log(200/3)$'ü $\log 200 - \log 3 = 2 + \log 2 - \log 3$ diye açmayı bilmemek.

Problem 6. Ses düzeyi $L = 10 \cdot \log(I / I_0)$ ile hesaplanır. Bir stadyumda tek bir taraftar grubunun tezahüratı 90 dB ölçülüyor. a) Aynı şiddette tezahürat yapan 100 grup birlikte bağırırsa ses düzeyi kaç dB olur? b) Bir haber: "Maç sırasında ses 95 dB'den 105 dB'e çıktı, yani yalnızca %10,5 arttı." Bu hesap nasıl yapılmış, neden yanıltıcı? c) Kulak sağlığı için önerilen sınır 85 dB'dir. 105 dB'lik sesin şiddeti bu sınırın kaç katıdır?

a) Şiddetler toplanır: $100I$. $L = 10 \cdot \log 100 + 90 = 20 + 90 =$ **110 dB**.
b) Haber $(105 - 95)/95 \approx$ %10,5 oranını kullanmış; ama ölçek logaritmiktir. 10 dB fark, şiddetin $10^1 =$ **10 katına** çıktığı anlamına gelir; yani artış %10,5 değil %900'dür.
c) $105 - 85 = 20$ dB → şiddet oranı $10^2 =$ **100 kat**.

Puan kaybettiren nokta: Desibel değerlerini doğrudan toplamak ya da oranlamak. Logaritmik ölçekte iki değerin farkı, gerçek şiddetlerin oranının logaritmasıdır.

Problem 7. Sabit olmayan bir aritmetik dizi (a_n) ile bir geometrik dizi (b_n) için $a_1 = b_1 = 3$, $a_3 = b_2$ ve $a_9 = b_3$'tür. a) d ve r'yi bul. b) Aritmetik dizinin ilk 20 terim toplamını ve geometrik dizinin ilk 5 terim toplamını bul. c) b_n ilk kez hangi n için $100 \cdot a_n$'yi geçer?

a) $a_3 = 3 + 2d = 3r \rightarrow r = 1 + 2d/3$. $a_9 = 3 + 8d = 3r^2$. Yerine koy: $3(1 + 2d/3)^2 = 3 + 8d \rightarrow 3 + 4d + 4d^2/3 = 3 + 8d \rightarrow (4/3)d^2 - 4d = 0 \rightarrow d = 0$ veya $d = 3$. Dizi sabit olmadığı için **d = 3**, **r = 3**. Diziler: $a_n = 3n$ (3, 6, 9, …), $b_n = 3^n$ (3, 9, 27, …). Kontrol: $a_3 = 9 = b_2$, $a_9 = 27 = b_3$ ✓
b) $S_{20} = 20 \cdot (3 + 60)/2 =$ **630**. Geometrik: $3 \cdot (3^5 - 1)/(3 - 1) = 3 \cdot 242/2 =$ **363**.
c) $3^n > 100 \cdot 3n = 300n$. n = 6: 729 < 1.800; n = 7: 2.187 > 2.100 → **n = 7**.

Puan kaybettiren nokta: d = 0 kökünü "dizi sabit olamaz" gerekçesiyle elememek; c şıkkında tek bir n'yi denemekle yetinip bir öncekini kontrol etmemek.

Problem 8. Bir basketbol topu 5 m yükseklikten bırakılıyor ve her yere çarpışında bir önceki yüksekliğin 3/5'i kadar sekiyor. a) 3. sekmede top kaç metreye çıkar? b) Top 4. kez yere çarptığı ana kadar toplam kaç metre yol almıştır? c) Sekme yüksekliği ilk kez kaçıncı sekmede 10 cm'nin altına iner? (log 2 ≈ 0,301, log 3 ≈ 0,477)

a) Sekme yükseklikleri geometrik dizi: $h_n = 5 \cdot (3/5)^n$. $h_3 = 5 \cdot 27/125 =$ **1,08 m**.
b) İlk düşüş 5 m; sonra 1., 2. ve 3. sekmelerde top hem çıkar hem iner: $5 + 2 \cdot (3 + 1{,}8 + 1{,}08) = 5 + 11{,}76 =$ **16,76 m**.
c) $5 \cdot 0{,}6^n < 0{,}1 \rightarrow 0{,}6^n < 0{,}02$. log 0,6 = log 6 - 1 ≈ 0,778 - 1 = -0,222; log 0,02 = log 2 - 2 ≈ -1,699. $n \cdot (-0{,}222) < -1{,}699$ → negatif sayıya bölünce yön değişir: $n > 7{,}65 \rightarrow$ **8. sekmede**. (Kontrol: $h_7 \approx 14$ cm, $h_8 \approx 8{,}4$ cm.)

Puan kaybettiren nokta: b şıkkında sekmeleri yalnızca bir kez saymak (çıkış ve iniş iki ayrı yol) ya da c şıkkında negatif log 0,6'ya bölerken eşitsizliğin yönünü çevirmemek.

Prova 1 – Temel

40 dakika · 7 soru · 100 puan · Çözümleri adım adım yaz

Soru 1 (10 puan). $\log_3 243 + \log_2(1/8) - \ln e^2 + \log 0{,}01$ işleminin sonucunu bulunuz.

Soru 2 (15 puan). log 2 = a ve log 3 = b olduğuna göre a) log 54, b) log 2,5 ifadelerini a ve b cinsinden yazınız.

Soru 3 (15 puan). $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru 4 (15 puan). $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 3) = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru 5 (15 puan). $3^{2x+1} \geq (1/9)^{x-3}$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerini aralık olarak yazınız.

Soru 6 (15 puan). Okul kütüphanesinin kitap kulübündeki üye sayısı her 2 ayda iki katına çıkıyor; başlangıçta 45 üye var. a) 8 ay sonra kaç üye olur? b) Kaç ay sonra üye sayısı 2.880 olur?

Soru 7 (15 puan). Bir aritmetik dizide $a_3 = 10$ ve $a_8 = 30$'dur. a) Ortak farkı ve ilk terimi bulunuz. b) a_{20}'yi ve ilk 20 terimin toplamını bulunuz.

Prova 1 – Cevap Anahtarı ve Puanlama

Soru 1. $\log_3 243 = 5$ **(2 p)**, $\log_2(1/8) = -3$ **(2 p)**, $\ln e^2 = 2$ **(2 p)**, $\log 0{,}01 = -2$ **(2 p)**. Sonuç: $5 - 3 - 2 - 2 = -2$ **(2 p)**.

Soru 2. a) $\log 54 = \log(2 \cdot 3^3) = \log 2 + 3\log 3 = a + 3b$ **(7 p)**. b) $\log 2{,}5 = \log(10/4) = 1 - 2\log 2 = 1 - 2a$ **(8 p)**.

Soru 3. $3^x = t$ $(t > 0)$: $t^2 - 10t + 9 = 0$ **(5 p)** $\rightarrow (t-1)(t-9) = 0 \rightarrow t = 1$ veya $t = 9$ **(5 p)** $\rightarrow 3^x = 1 \rightarrow x = 0$; $3^x = 9 \rightarrow x = 2$. Çözüm kümesi $\{0, 2\}$ **(5 p)**.

Soru 4. Tanım: $x + 1 > 0$ ve $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$ **(4 p)**. $\log_2[(x+1)(x-3)] = 5 \rightarrow (x+1)(x-3) = 32 \rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0 \rightarrow (x-7)(x+5) = 0$ **(7 p)**. $x = -5$ tanım kümesinde değil; çözüm kümesi $\{7\}$ **(4 p)**.

Soru 5. $(1/9)^{x-3} = 3^{-2(x-3)} = 3^{-2x+6}$ **(5 p)**. Taban $3 > 1$, yön korunur: $2x + 1 \geq -2x + 6$ **(5 p)** $\rightarrow 4x \geq 5 \rightarrow x \geq 5/4 \rightarrow [5/4, \infty)$ **(5 p)**.

Soru 6. $N(t) = 45 \cdot 2^{t/2}$ **(3 p)**. a) 8 ay = 4 katlanma: $45 \cdot 16 = 720$ üye **(6 p)**. b) $45 \cdot 2^{t/2} = 2.880 \rightarrow 2^{t/2} = 64 = 2^6 \rightarrow t/2 = 6 \rightarrow t = 12$ ay **(6 p)**.

Soru 7. a) $5d = 30 - 10 = 20 \rightarrow d = 4$, $a_1 = 10 - 2 \cdot 4 = 2$ **(7 p)**. b) $a_{20} = 2 + 19 \cdot 4 = 78$; $S_{20} = 20 \cdot (2 + 78) / 2 = 800$ **(8 p)**.

Toplam: $10 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 100$ puan.

Prova 2 – 90+ Zorluk

40 dakika · 7 soru · 100 puan · Tanım kümesini ve her adımı yaz

Soru 1 (10 puan). $f(x) = \log_2(x + 4) - 1$ fonksiyonu için a) tanım kümesini ve asimptotu, b) grafiğin eksenleri kestiği noktaları bulunuz. c) $f^{-1}(x)$'i yazınız.

Soru 2 (15 puan). $\log_2 3 = a$ olduğuna göre a) $\log_{12}54$, b) $\log_9 16$ ifadelerini a cinsinden yazınız.

Soru 3 (15 puan). a) $\log_3 x - \log_9 x + \log_{27} x = 5$ denklemini çözünüz. b) $2^{2x+1} - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru 4 (15 puan). $\log_{1/3}(x + 2) + \log_{1/3}(x - 4) \geq -3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz. Bu eşitsizliği sağlayan tam sayıları yazınız.

Soru 5 (15 puan). Bir müzik platformunda yeni çıkan bir şarkının toplam dinlenme sayısı $N(t) = N_0 \cdot 3^{t/k}$ modeline uyuyor (t gün). 2. günün sonunda 1.800, 6. günün sonunda 16.200 dinlenme var. a) k'yi ve N_0'ı bulunuz; k'nin anlamını açıklayınız. b) Dinlenme sayısı yaklaşık kaç gün sonra 1.000.000'u geçer? (log 2 ≈ 0,301, log 3 ≈ 0,477)

Soru 6 (15 puan). Artan bir geometrik dizinin ilk üç teriminin çarpımı 216, toplamı 26'dır. a) Dizinin ilk üç terimini bulunuz. b) Genel terimi ve ilk 6 terimin toplamını bulunuz.

Soru 7 (15 puan). Okulun bilgi yarışması turnuvasında bir takımın n. turda topladığı puan a_n ile gösteriliyor: $a_1 = 1$ ve $a_{n+1} = 3a_n + 4$. a) a_2, a_3, a_4'ü bulunuz. b) $b_n = a_n + 2$ dizisinin geometrik olduğunu gösteriniz ve a_n'yi n cinsinden yazınız. c) Takımın puanı ilk kez hangi turda 2.000'i geçer?

Prova 2 – Cevap Anahtarı ve Puanlama

Soru 1. a) $x + 4 > 0 \to$ tanım kümesi $(-4, \infty)$, dikey asimptot $x = -4$ **(3 p)**.
b) $f(0) = \log_2 4 - 1 = 1 \to (0, 1)$; $\log_2(x + 4) = 1 \to x + 4 = 2 \to x = -2 \to (-2, 0)$ **(4 p)**.
c) $y + 1 = \log_2(x + 4) \to x = 2^{y+1} - 4 \to f^{-1}(x) = 2^{x+1} - 4$ **(3 p)**.

Soru 2. 2 tabanına geç **(2 p)**. a) $\log_2 54 = \log_2(2 \cdot 3^3) = 1 + 3a$; $\log_2 12 = \log_2(2^2 \cdot 3) = 2 + a \to \log_{12}54 = (1 + 3a)/(2 + a)$ **(7 p)**.
b) $\log_9 16 = \log_2 16 / \log_2 9 = 4/(2a) = 2/a$ **(6 p)**.

Soru 3. a) Tanım: $x > 0$ **(1 p)**. $\log_9 x = \tfrac{1}{2}\log_3 x$, $\log_{27} x = \tfrac{1}{3}\log_3 x \to (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})\log_3 x = 5 \to (5/6)\log_3 x = 5 \to \log_3 x = 6 \to x = 3^6 = 729$ **(6 p)**.
b) $2^x = t > 0$: $2t^2 - 17t + 8 = 0 \to (2t - 1)(t - 8) = 0$ **(4 p)** $\to t = 1/2$ veya $t = 8 \to x = -1$ veya $x = 3$: Ç = {-1, 3} **(4 p)**.

Soru 4. Tanım: $x + 2 > 0$ ve $x - 4 > 0 \to x > 4$ **(4 p)**. $\log_{1/3}[(x + 2)(x - 4)] \geq -3 = \log_{1/3}27$ **(3 p)**. Taban < 1 → yön değişir: $(x + 2)(x - 4) \leq 27 \to x^2 - 2x - 35 \leq 0 \to (x - 7)(x + 5) \leq 0 \to -5 \leq x \leq 7$ **(4 p)**. Kesişim: $(4, 7]$; tam sayılar: 5, 6, 7 **(4 p)**.

Soru 5. a) Oranla: $N(6)/N(2) = 3^{4/k} = 16.200/1.800 = 9 = 3^2 \rightarrow 4/k = 2 \rightarrow k = 2$ **(4 p)**. $N_0 \cdot 3^1 = 1.800 \rightarrow N_0 = 600$ **(3 p)**. k, üç katına çıkma süresidir: dinlenme sayısı her 2 günde 3 katına çıkıyor **(2 p)**.
b) $600 \cdot 3^{t/2} > 1.000.000 \rightarrow 3^{t/2} > 5.000/3 \rightarrow t/2 > (\log 5.000 - \log 3)/\log 3 = (3,699 - 0,477)/0,477 \approx 6,75 \rightarrow t > 13,5$ → yaklaşık 13,5 gün sonra, yani 14. gün içinde geçer **(6 p)**. (Kontrol: $N(14) = 600 \cdot 3^7 = 1.312.200$; $N(13) \approx 757.600$.)

Soru 6. a) Terimler $6/r$, 6, $6r$ (çarpım $6^3 = 216$ → orta terim 6) **(3 p)**. $6/r + 6 + 6r = 26 \rightarrow 6r^2 - 20r + 6 = 0 \rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0 \rightarrow r = 3$ veya $r = 1/3$ **(5 p)**. Dizi artan → r = 3: 2, 6, 18 (kontrol: $2 \cdot 6 \cdot 18 = 216$, $2 + 6 + 18 = 26$ ✓) **(2 p)**.
b) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$; $S_6 = 2 \cdot (3^6 - 1)/(3 - 1) = 728$ **(5 p)**.

Soru 7. a) $a_2 = 3 + 4 = 7$, $a_3 = 21 + 4 = 25$, $a_4 = 75 + 4 = 79$ **(4 p)**.
b) $b_{n+1} = a_{n+1} + 2 = 3a_n + 6 = 3(a_n + 2) = 3 \cdot b_n$ → ortak çarpanı 3 olan geometrik dizi **(3 p)**. $b_1 = 3 \rightarrow b_n = 3^n \rightarrow a_n = 3^n - 2$ **(3 p)**.
c) $3^n - 2 > 2.000 \rightarrow 3^n > 2.002$. $3^6 = 729$ ($a_6 = 727$), $3^7 = 2.187$ ($a_7 = 2.185$) → ilk kez 7. turda **(5 p)**.

Toplam: 10 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 100 puan. Tanım kümesi satırı yazılmadan bulunan doğru cevaplarda ilgili adımın puanı verilmez.

Son gün kontrol listesi

- [ ] Üstel fonksiyonda taban şartlarını ($a > 0$, $a \neq 1$) yazıyor, artan/azalan grafiği tanıyor ve kaydırılmış grafikte asimptotu ($y = k$) buluyorum.
- [ ] $\log_a b = c \iff a^c = b$ dönüşümünü iki yönde yapabiliyor, üstel fonksiyonun tersini tanım kümesiyle birlikte yazabiliyorum.
- [ ] Her logaritma sorusunda ilk satıra taban > 0, taban ≠ 1, içi > 0 şartlarını yazıyorum.
- [ ] log 2 ≈ 0,301 ve log 3 ≈ 0,477 ile basamak sayısını ve ilk rakamı bulabiliyorum; "+1"i unutmuyorum.
- [ ] Çarpım, bölüm, kuvvet, taban değiştirme, ters çevirme, zincir ve yer değiştirme kurallarını kullanabiliyorum; $\log x^2 = 2 \log |x|$ olduğunu biliyorum.
- [ ] Eşitsizlikte taban 1'den küçükse yönü bir kez çeviriyor, sonucu tanım kümesiyle kesiştiriyor ve uç noktaların açık/kapalı olduğuna dikkat ediyorum.
- [ ] Yabancı kökleri (logaritmaları birleştirince) ve kayıp kökleri ($\log x^2 \rightarrow 2 \log x$) tanıyorum.
- [ ] Faiz, yüzde büyüme, katlanma, yarılanma, pH, dB ve Richter modellerini yazıp iki veriden parametreleri bulabiliyor, eşik zamanını tam değerlerle kontrol ediyorum.
- [ ] Aritmetik ve geometrik dizide genel terim ve toplam formüllerini kullanıyor, S_n'den a_n'yi $a_1 = S_1$ kontrolüyle buluyorum.
- [ ] İndirgeme bağıntısını uygun bir yardımcı diziyle ($b_n = a_n + c$) geometrik diziye çevirebiliyorum.
- [ ] Her cevapta tanım kümesi, işlem, sonuç, birim ve kısa gerekçeyi yazıyorum.

Başarılar!

Kaynak: MEB ÖDSGM konu soru dağılım tablosu 2026-2027