10. SINIF MATEMATİK · 1. DÖNEM 1. YAZILI · 90+ SÜRÜMÜ · VARYASYON A

Açıların Dili: Oranlar, Üçgenin Elemanları ve Çapraz Tablolar

Bu notta yazılıya giren her kazanımı sırayla ele alıyoruz: kısa anlatım, ölçüye uygun çizilmiş şekiller, konunun arka planını açan **Derinleşelim** kutuları ve **Kolay → Orta → Zor** diye ilerleyen çözümlü örnekler. Örneklerin çoğu sahadan, sahneden, sınıftan ve kütüphaneden. En sonda konuları birbirine bağlayan bir **90+ Atölyesi** ve puanlama anahtarıyla iki deneme seni bekliyor: **Prova 1 – Temel** ve **Prova 2 – 90+ Zorluk**.

Sınav bilgisi ve kapsam

Takvimde matematik yazılısı **5 Kasım 2026** tarihinde; süre **40 dakika**, soruların hepsi **açık uçlu**. Tarihi okulundan mutlaka teyit et.

Kod	Konu	Soru sayısı*
10.1.1	Dik üçgende trigonometrik oranlar ve trigonometrik özdeşlikler	2–3
10.1.2	Üçgenin yardımcı elemanları	1–2
10.1.3	Üçgenin alanı (kenar ve yükseklik değişince alan nasıl değişir?)	1–2
10.1.4	Sinüs ve kosinüs teoremleri	1–2
10.2.1	İki kategorik değişkenli veriler	0–2

*MEB tablosunda 5 senaryo bulunuyor ve okulundaki zümre bunlardan birini seçiyor. İki kategorik değişkenli veri sorusu yalnızca Senaryo 1, 2 ve 3'te yer alıyor. **Hangi senaryonun seçildiğini öğretmenine sor**; emin olamazsan hepsini çalış.

Tam puan için cevap yazma

Açık uçlu sorular **puanlama anahtarıyla** okunur ve anahtarda her adımın kendi puanı vardır. Sonucu doğru bulup adımları göstermeyen öğrenci puanın bir bölümünü kaybeder; sonucu yanlış olsa da doğru kurulmuş bir çözüm kısmi puan alır.

Adım	Öğretmenin baktığı şey
Veri ve şekil	Verilenleri şekle işledin mi? Dik açı, kullandığın açı, karşı ve komşu kenar şekilde görünüyor mu?
Kural	Hangi bağıntıyı kullandığını yazdın mı? (ör. "Sinüs teoremi: a/sin A = b/sin B")
İşlem	Değerleri yerine koyduğun satır ve ara adımlar kâğıtta duruyor mu?
Sonuç ve birim	Sonuç sade mi (4√2, 2√19, sadeleşmiş kesir)? Uzunluğa cm, alana cm² yazdın mı?
Gerekçe	Soru "yorumlayınız" ya da "açıklayınız" diyorsa bir cümlelik gerekçe var mı? (ör. "Satır yüzdeleri farklı olduğu için ilişki vardır.")

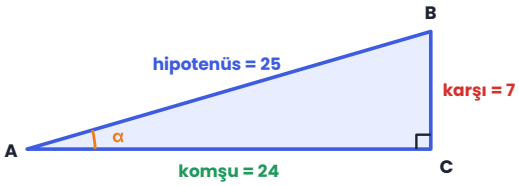
Zayıf cevap · 3/10
Soru: ABC üçgeninde m(A) = 45°, m(B) = 30° ve b = 4 cm ise a kaç cm'dir?
Cevap: "a = 4√2"

Tam puanlık cevap · 10/10
"Sinüs teoremi: a/sin A = b/sin B. a/(√2/2) = 4/(1/2) = 8 olduğundan a = 8·(√2/2) = 4√2 cm."

1. Dik Üçgende Trigonometrik Oranlar

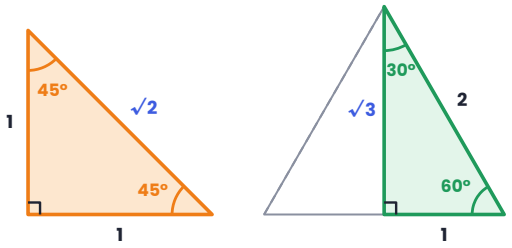
10.1.1 · sin, cos, tan, cot ve özdeşlikler

Dik üçgende dar açılardan birini seç ve ona α de. Hipotenüs dik açının karşısındaki en uzun kenardır; diğer iki kenar α'ya göre **karşı** ve **komşu** diye adlandırılır. Bu üç kenardan dört oran çıkar:



Kenarlar her zaman **seçilen açıya göre** adlandırılır. B açısını seçseydin 24 karşı, 7 komşu olurdu.

Oran	Tanım	α için
sin α	karşı / hipotenüs	**7/25**
cos α	komşu / hipotenüs	**24/25**
tan α	karşı / komşu	**7/24**
cot α	komşu / karşı	**24/7**



Özel açıların değerlerini ezberlemek yerine bu iki üçgeni çiz; her oranı kenarlardan okursun.

	30°	45°	60°
sin	1/2	√2/2	√3/2
cos	√3/2	√2/2	1/2
tan	√3/3	1	√3
cot	√3	1	√3/3

Açı 30°'den 60°'ye büyüdükçe sin ve tan **artar**, cos ve cot **azalır**.

= Temel özdeşlikler

sin²α + cos²α = 1

Nereden geliyor? Pisagor: karşı² + komşu² = hipotenüs². Her terimi hipotenüs²'ye bölmen yeterli.

tan α = sin α / cos α · tan α · cot α = 1

90 Tümler açılar

Toplamı 90° olan iki dar açıda birinin karşı kenarı, ötekinin komşu kenarıdır. Bu yüzden:

sin x = cos(90° − x) · tan x = cot(90° − x)

Örnek: cos 18° = sin 72°, cot 40° = tan 50°.

KOLAY **Örnek 1. x dar açı ve cos x = 20/29 ise sin x ve tan x kaçtır?**

Komşu 20, hipotenüs 29 olan dik üçgen çiz. Karşı = √(29² − 20²) = √(841 − 400) = √441 = 21.
sin x = **21/29**, tan x = **21/20**.

ORTA **Örnek 2. $\tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ$ çarpımı kaçtır?**

Tümler çiftleri eşle: $\tan 80^\circ = \cot 10^\circ$, $\tan 70^\circ = \cot 20^\circ$. Çarpım $(\tan 10^\circ \cdot \cot 10^\circ) \cdot (\tan 20^\circ \cdot \cot 20^\circ) = 1 \cdot 1 = \mathbf{1}$.

KOLAY **Örnek 3. $\cot x \cdot \sin x + \cos x$ ifadesini sadeleştir.**

$\cot x = \cos x / \sin x \Rightarrow \cot x \cdot \sin x = \cos x$. İfade $\cos x + \cos x = \mathbf{2 \cos x}$ olur ($\sin x \neq 0$).

Taktik: Bir oran verilip diğerleri soruluyorsa **önce dik üçgeni çiz**: verilen orandan iki kenarı yaz, üçüncüsünü Pisagor'la bul. Sık karşına çıkacak üçlüler: 3-4-5, 5-12-13, 7-24-25, 8-15-17, 20-21-29 ve bunların katları (6-8-10, 9-12-15, 15-20-25).

Sık yapılan hatalar

- Kenarları yanlış açıya göre okumak. Önce açıyı işaretle, sonra karşı ve komşu kenarı adlandır.
- $\cos^2 x$ ile $\cos(x^2)$'yi karıştırmak: $\cos^2 x = (\cos x)^2$ demektir.
- Dar açı için sin ya da cos değerini 1'den büyük bulup devam etmek. Hipotenüs en uzun kenar olduğundan bu imkânsızdır; bir yerde hata var demektir.

Derinleşelim: Bu oranlar neden üçgenin büyüklüğüne bağlı değil?

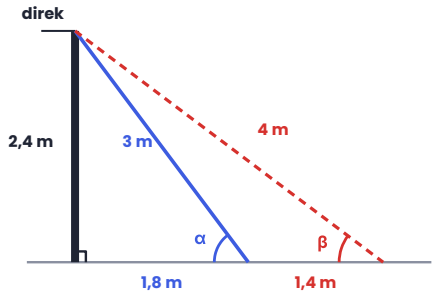
- **Benzerlik:** Bir dar açısı aynı olan bütün dik üçgenlerin üç açısı da aynıdır, yani benzerdirler. Benzer üçgenlerde kenarların oranı değişmez. Bu yüzden basketbol sahasındaki dev bir üçgende de defterindeki küçük üçgende de $\tan 45^\circ = 1$'dir.
- **Değer aralıkları:** Dar açıda $0 < \sin x < 1$ ve $0 < \cos x < 1$. $\tan x$ ise her pozitif değeri alabilir: $x < 45^\circ$ iken $\tan x < 1$, $x = 45^\circ$ iken $\tan x = 1$, $x > 45^\circ$ iken $\tan x > 1$.
- **Özdeşlikten özdeşlik:** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$'i $\sin^2 x$'e bölersen $1 + \cot^2 x = 1/\sin^2 x$ elde edersin. İspat sorusunda karmaşık taraftan başla, her şeyi sin ve cos cinsinden yaz, öbür tarafa ulaşınca dur.
- **İleriye bağlantı:** Alan formülü $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$ (10.1.3) ile sinüs ve kosinüs teoremleri (10.1.4), bu bölümdeki dik üçgen oranlarından türetilir.

ORTA **Örnek 3a. $\sin^4 x - \cos^4 x$ ifadesini sadeleştir ve $x = 60^\circ$ için değerini bul.**

İki kare farkı: $(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot 1 = \mathbf{\sin^2 x - \cos^2 x}$.
$x = 60^\circ$ için: $(\sqrt{3}/2)^2 - (1/2)^2 = 3/4 - 1/4 = \mathbf{1/2}$.

ZOR **Örnek 3b (Özdeşlikle hesap). x dar açı ve $\sin x - \cos x = 7/13$'tür. a) $\sin x \cdot \cos x$ b) $\sin x + \cos x$ c) $\sin x$, $\cos x$ ve $\tan x + \cot x$ değerlerini bul.**

a) Karesini al: $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 49/169 \Rightarrow 1 - 2 \sin x \cos x = 49/169 \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \mathbf{60/169}$.
b) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \cdot 60/169 = 289/169$. Dar açıda ikisi de pozitif $\Rightarrow \sin x + \cos x = \mathbf{17/13}$.
c) Taraf tarafa topla: $2 \sin x = 24/13 \Rightarrow \sin x = \mathbf{12/13}$, $\cos x = \mathbf{5/13}$. $\tan x + \cot x = (\sin^2 x + \cos^2 x)/(\sin x \cos x) = 1 \div (60/169) = \mathbf{169/60}$.



Direğin boyu sabit kalır; halat uzadıkça bağlantı noktası uzaklaşır ve halatın yerle yaptığı açı küçülür.

ZOR **Örnek 3c (Gerçek yaşam). Okul bahçesindeki voleybol filesinin 2,4 m'lik direği, tepesinden yere gerilen bir halatla sabitleniyor. Halat yere direğin dibinden 1,8 m uzakta bağlanmış. a) Halat kaç m'dir, halatın yerle yaptığı α açısı için sin α kaçtır? b) Halat 4 m'lik yenisiyle değiştirilip yine direğin tepesine bağlanırsa yerdeki bağlantı noktası kaç m uzaklaşır? c) Yeni açı β için tan β kaçtır? Açı büyüdü mü, küçüldü mü?**

a) Halat = $\sqrt{(2{,}4^2 + 1{,}8^2)} = \sqrt{(5{,}76 + 3{,}24)} = \sqrt{9} = \mathbf{3}$ **m**; $\sin\alpha = 2{,}4/3 = \mathbf{4/5}$.
b) Yeni uzaklık = $\sqrt{(4^2 - 2{,}4^2)} = \sqrt{(16 - 5{,}76)} = \sqrt{10{,}24} = 3{,}2$ m ⇒ **1,4 m** uzaklaşır.
c) $\tan\beta = 2{,}4/3{,}2 = \mathbf{3/4}$; önceki $\tan\alpha = 2{,}4/1{,}8 = 4/3$. Tanjant küçüldü ⇒ **açı küçüldü**.

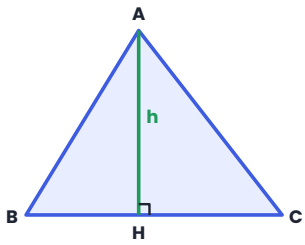
Tuzak

- $\cos x = 12/13$ verilince $\sin x = 1 - 12/13 = 1/13$ yazmak. Özdeşlik **kareler** içindir: $\sin^2 x = 1 - 144/169 = 25/169$ ⇒ $\sin x = 5/13$.
- $\cos(30° + 30°) = \cos 30° + \cos 30°$ sanmak: sol taraf $\cos 60° = 1/2$, sağ taraf $\sqrt{3} \approx 1{,}73$. Trigonometrik oranlar toplamaya dağılmaz.
- $\tan x = 3/4$ görünce "karşı 3 cm" demek. Oran yalnızca kenarların oranını verir; gerçek kenarlar 3k ve 4k'dir.

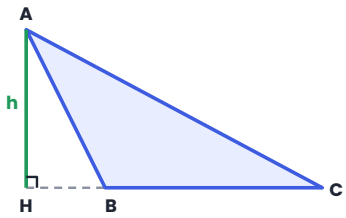
2. Üçgenin Yardımcı Elemanları

10.1.2 · Yükseklik, kenarortay, açıortay, kenar orta dikme

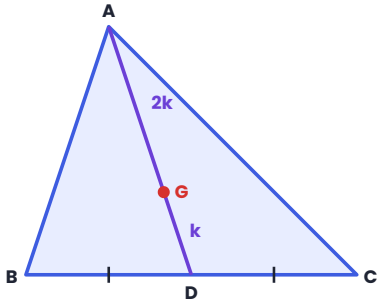
Eleman	Tanım	Üçünün kesiştiği nokta
Yükseklik	Köşeden karşı kenara (ya da uzantısına) dik inen doğru parçası	Diklik merkezi
Kenarortay	Köşeyi karşı kenarın orta noktasına birleştirir	Ağırlık merkezi (G)
Açıortay	İç açıyı iki eş açıya böler	İç teğet çemberin merkezi
Kenar orta dikme	Kenarın orta noktasından o kenara dik çizilen doğru	Çevrel çemberin merkezi



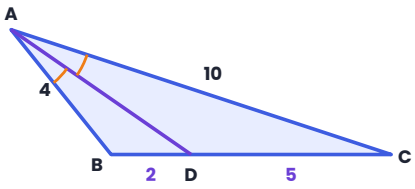
Dar açılı üçgende yükseklik içeride.



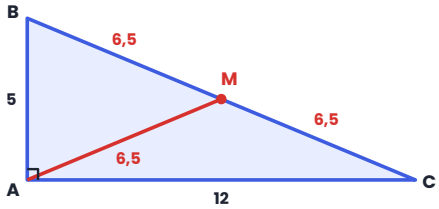
B geniş açı: A'dan inen yükseklik [BC]'nin uzantısına düşer.



Ağırlık merkezi G, kenarortayı köşeden itibaren **2 : 1** böler.



İç açıortay teoremi: |BD| / |DC| = |AB| / |AC| = 4/10 ⇒ BC = 7 cm, 2 + 5 parça.



Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay hipotenüsün yarısıdır: |MA| = |MB| = |MC| = 13/2.

KOLAY **Örnek 4. ABC üçgeninde [BE] kenarortay, G ağırlık merkezi ve |BG| = 10 cm ise |GE| ve |BE| kaçtır?**

|BG| = 2k = 10 ⇒ k = 5. |GE| = **5 cm**, |BE| = 3k = **15 cm**.

KOLAY **Örnek 5. Dik kenarları 9 cm ve 12 cm olan dik üçgende hipotenüse ait kenarortay kaç cm'dir?**

Hipotenüs = √(81 + 144) = 15. Kenarortay hipotenüsün yarısı: **7,5 cm**.

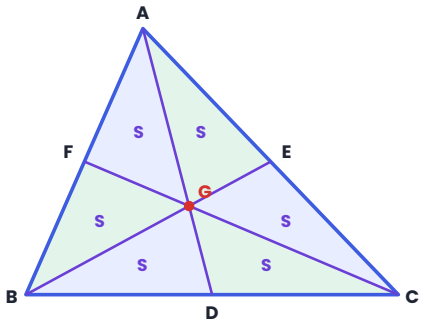
ORTA **Örnek 6. ABC üçgeninde [AD] iç açıortay, |AB| = 4 cm, |AC| = 10 cm, |BC| = 7 cm ise |BD| ve |DC| kaçtır?**

|BD| / |DC| = 4/10 = 2/5. BC'yi 2 + 5 = 7 parçaya böl: 7/7 = 1 ⇒ |BD| = **2 cm**, |DC| = **5 cm**.

Taktik: Ağırlık merkezi gördüğün an kenarortayı **2k ve k** diye işaretle. Açıortayda karşı kenarı, açıyı oluşturan iki kenarın oranında parçalara ayır: oranı yaz, parça sayısını topla, kenarı parça sayısına böl.

Sık yapılan hata

Yükseklik, kenarortay ve açıortayı aynı doğru sanmak. Genelde üçü farklı doğrulardır; yalnızca ikizkenar üçgende tepe köşesinden çizilenler (eşkenar üçgende ise hepsi) çakışır. Şekilde bir doğru "orta gibi" görünüyor diye kenarortay kabul etme.



Üç kenarortay üçgeni alanları eşit 6 parçaya böler: her biri S = A(ABC)/6.

Derinleşelim: Kuralların arkasındaki fikirler

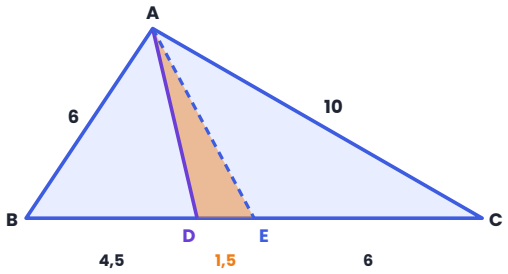
- **Kenarortay alanı ikiye böler:** ABD ile ADC'nin tabanları eşit (|BD| = |DC|) ve A'dan inen yükseklikleri ortak ⇒ alanları eşit. Üç kenarortay birlikte 6 eş parça oluşturur.
- **2 : 1 nereden?** E ve F orta noktalar olduğundan [EF] ∥ [BC] ve |EF| = |BC|/2. GEF ile GBC benzer ve oran 1 : 2 ⇒ |GE| = |BG|/2.

Derinleşelim: Açıortay ve orta dikme

- **Açıortay teoremi neden doğru?** Açıortay üzerindeki her nokta açının iki koluna eşit uzaklıktadır (d). A(ABD) = |AB|·d/2, A(ADC) = |AC|·d/2 ⇒ alan oranı |AB| : |AC|. Aynı iki üçgen A'dan inen yüksekliği de paylaştığından alan oranı |BD| : |DC|'ye eşittir. İki oranı eşitleyince teorem çıkar. Burada yardımcı elemanla alan konusu birleşiyor.
- **Kenar orta dikme:** Üzerindeki her nokta kenarın iki ucuna eşit uzaklıktadır. Üç orta dikmenin kesiştiği nokta üç köşeye eşit uzaklıkta olduğundan çevrel çemberin merkezidir. Dik üçgende bu nokta hipotenüsün orta noktasıdır; "hipotenüse ait kenarortay = hipotenüs/2" kuralı buradan gelir.

ORTA **Örnek 6a. ABC üçgeninde G ağırlık merkezi, D ise [BC]'nin orta noktasıdır. A(AGB) = 16 cm² ise A(ABC) ve A(BGD) kaçtır?**

AGB üçgeni 6 eş parçanın ikisinden oluşur ⇒ bir parça 8 cm². A(ABC) = 6·8 = **48 cm²**; BGD tek parça ⇒ A(BGD) = **8 cm²**.



[AD] açıortay (mor), [AE] kenarortay (kesikli mavi). Turuncu ADE üçgeninin tabanı |DE| = 1,5.

ZOR **Örnek 6b (Açıortay + kenarortay). ABC üçgeninde |AB| = 6 cm, |AC| = 10 cm, |BC| = 12 cm; [AD] iç açıortay, [AE] kenarortaydır (D, E ∈ [BC]). a) |BD| ve |DE| kaçtır? b) A(ADE) / A(ABC) oranı kaçtır?**

a) |BD|/|DC| = 6/10 = 3/5 ⇒ 12 cm 8 parça, 1 parça 1,5 ⇒ |BD| = **4,5 cm**. |BE| = 12/2 = 6 ⇒ |DE| = 6 - 4,5 = **1,5 cm**.
b) ADE ile ABC, A'dan inen aynı yüksekliği paylaşır ⇒ alan oranı = taban oranı = 1,5/12 = **1/8**.

ZOR **Örnek 6c (Dik üçgende ağırlık merkezi). ABC üçgeninde m(A) = 90°, |AB| = 5 cm, |AC| = 12 cm ve G ağırlık merkezidir. |AG| ve |BG| uzunluklarını bul.**

|BC| = √(25 + 144) = 13. A'dan çıkan kenarortay hipotenüse iner, uzunluğu 13/2 ⇒ |AG| = (2/3)·(13/2) = **13/3 cm**.
B'den çıkan kenarortay [AC]'nin orta noktası N'ye gider: |AN| = 6 ⇒ |BN| = √(25 + 36) = √61. |BG| = (2/3)·√61 = **2√61/3 cm**.

Tuzak

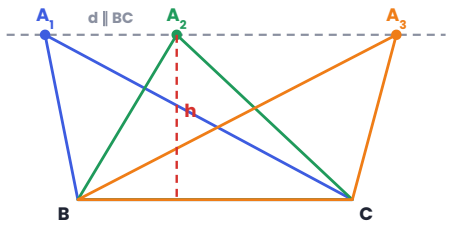
- G'nin oranını ters kurmak: kenarortay köşeden itibaren 2 : 1 bölünür. |BG| = 2|GE| doğru, |GE| = 2|BG| yanlış.
- Açıortay teoreminde parçaları çapraz eşlemek: B'ye bitişik parça |BD|, B'ye bitişik kenar |AB| ile eşleşir: |BD|/|DC| = |AB|/|AC|.
- Hipotenüse ait kenarortay kuralını dik olmayan üçgende kullanmak. Kural yalnızca dik üçgende geçerlidir.

3. Üçgenin Alanı

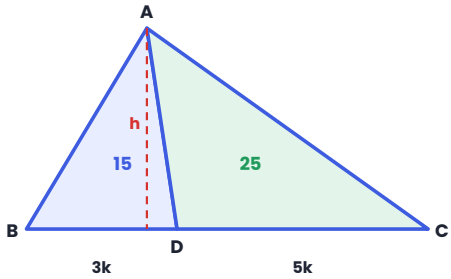
10.1.3 · Taban ve yükseklik değişince alan nasıl değişir?

Alan = (taban × o tabana ait yükseklik) / 2

Kazanımın özü: alan, taban ile yüksekliğin **çarpımıyla orantılıdır**. Taban ya da yükseklik kaç katına çıkarsa alan da o kadar katına çıkar; ikisi birden değişiyorsa çarpanlar **çarpılır**.



Tabanı BC olan ve tepesi BC'ye paralel d doğrusu üzerinde dolaşan üçgenlerin yüksekliği aynıdır, bu yüzden alanları eşittir.



Ortak yüksekliği olan üçgenlerde alanlar oranı = tabanlar oranı: 15 : 25 = 3 : 5.

Değişim	Alan çarpanı	Sonuç
Taban 3 katına, yükseklik 1/3'üne	3 · (1/3) = 1	Alan değişmez
Taban ve yükseklik 2'şer katına	2 · 2 = 4	Alan 4 katına çıkar
Taban %50 artar, yükseklik %50 azalır	1,5 · 0,5 = 0,75	Alan %25 azalır (değişmez değil!)
Taban ve yükseklik %10'ar artar	1,1 · 1,1 = 1,21	Alan %21 artar (%20 değil)

ORTA **Örnek 7. Şekildeki ABC üçgeninde D ∈ [BC], |BD| : |DC| = 3 : 5 ve A(ADC) = 25 cm² ise A(ABC) ve A(ABD) kaçtır?**

Yükseklik ortak ⇒ alanlar 3k : 5k. 5k = 25 ⇒ k = 5. A(ABD) = **15 cm²**, A(ABC) = 8k = **40 cm²**.

KOLAY **Örnek 8 (Bilgi). İki kenarı 6 cm ve 8 cm, bu kenarlar arasındaki açı 45° olan üçgenin alanı kaç cm²'dir?**

8 cm'lik kenara inen yükseklik 6·sin 45° = 3√2 ⇒ Alan = ½·8·6·sin 45° = 24·(√2/2) = **12√2 cm²**.

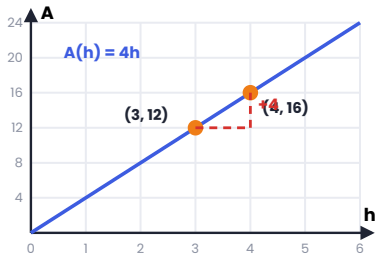
Taktik: Yüzde sorularında her yüzdeyi **çarpana** çevir: %40 artış = 1,4; %25 azalış = 0,75. Çarpanları çarp ve sonucu 1 ile karşılaştır. Örneğin 1,25 · 0,8 = 1 olduğu için "%25 artır, %20 azalt" alanı değiştirmez.

Sık yapılan hata

Yükseklik yerine eğik kenarı kullanmak. Yükseklik, tabana **dik** olan uzunluktur; geniş açılı üçgende tabanın uzantısına iner.

Derinleşelim: Hangi taban, hangi yükseklik?

- **Her kenar taban olabilir:** $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2 \cdot$Alan. Kenarlar ile o kenarlara ait yükseklikler ters orantılıdır: en uzun kenarın yüksekliği en kısadır.
- **Ortak yükseklik ⇒ taban oranı; ortak taban ⇒ yükseklik oranı.** Tepe noktası tabana paralel bir doğruda kayarsa alan sabit kalır (A_1, A_2, A_3).
- **Fonksiyon gözüyle:** Taban b sabitken $A(h) = (b/2) \cdot h$ doğrusal bir fonksiyondur; grafiği orijinden geçen, eğimi b/2 olan bir doğru. Taban 8 ise $A(h) = 4h$: yükseklik 1 cm artınca alan her zaman 4 cm² artar.
- **Trigonometriyle:** b ve c kenarları arasındaki açı A ise c'nin ucundan b'ye inen yükseklik $c \cdot \sin A$ ⇒ Alan = $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$. Kenarlar aynı kalırsa alan, açı 90°'ye yaklaştıkça büyür ($\sin 90° = 1$).



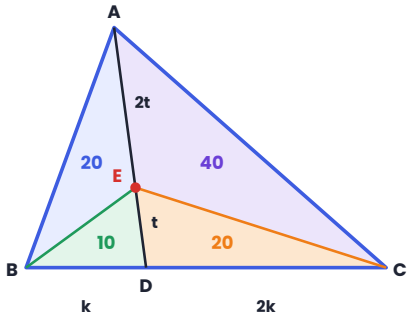
Taban 8 cm iken alan–yükseklik grafiği: eğim 4, yani her +1 cm yükseklik +4 cm² alan.

ORTA **Örnek 8a (Kenar–yükseklik). Bir üçgende |BC| = 12 cm ve A'dan [BC]'ye inen yükseklik 5 cm'dir. |AC| = 10 cm ise B'den [AC]'ye inen yükseklik kaç cm'dir?**

Alanı iki yoldan yaz: $12 \cdot 5/2 = 10 \cdot h_b/2 \Rightarrow 60 = 10 \cdot h_b \Rightarrow h_b =$ **6 cm**. (Daha kısa kenara daha uzun yükseklik düşer: 10 < 12, 6 > 5.)

ORTA **Örnek 8b. Okul panosuna asılacak üçgen bir afişin yüksekliği %150 artırılıyor. Alanın değişmemesi için taban yüzde kaç azaltılmalıdır?**

%150 artış ⇒ yükseklik çarpanı 2,5. Taban çarpanı k: $2{,}5 \cdot k = 1 \Rightarrow k = 0{,}4$ ⇒ taban **%60 azaltılmalı**. (Dikkat: %150 azaltmak anlamsızdır; çarpanla düşün.)



Ortak yükseklik kuralı iki kez: önce D noktası [BC]'yi, sonra E noktası [AD]'yi böler. Sayılar cm².

ZOR **Örnek 8c (İç içe alanlar). ABC üçgeninde D ∈ [BC] ve |DC| = 2|BD|; E noktası [AD] üzerinde ve |AE| = 2|ED|'dir. A(ABC) = 90 cm² ise A(BEC) ve A(ABE) kaçtır?**

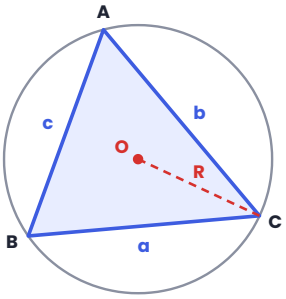
ABD ile ADC'nin yüksekliği ortak ⇒ alanlar 1 : 2 ⇒ A(ABD) = 30, A(ADC) = 60.
ABD içinde ABE ile EBD, B'den [AD]'ye inen yüksekliği paylaşır ⇒ 2 : 1 ⇒ A(ABE) = 20, A(EBD) = 10. Aynı şekilde A(AEC) = 40, A(EDC) = 20.
A(BEC) = 10 + 20 = **30 cm²**, A(ABE) = **20 cm²**.
Kontrol: 20 + 10 + 40 + 20 = 90.

Tuzak

- Çarpanları toplamak: taban 2 katına, yükseklik 4 katına çıkarsa alan 2 + 4 = 6 değil, 2 · 4 = **8** katına çıkar.
- Oranı yanlış bütüne kurmak: |DC| = 2|BD| ise A(ADC)/A(ABC) = 2/3'tür, 2/1 değil. Önce parçaların toplamını (k + 2k = 3k) yaz.
- "%10 artar, %10 artar ⇒ %20 artar" demek: 1,1·1,1 = 1,21, yani artış %21'dir.

4. Sinüs ve Kosinüs Teoremleri

10.1.4 · Doğrulama, ispat fikri ve hesaplama



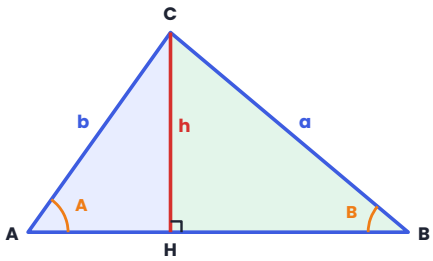
Sinüs teoremi: kenarın karşı açının sinüsüne oranı her kenar için aynıdır ve çevrel çemberin çapına (2R) eşittir.

a / sin A = b / sin B = c / sin C = 2R

a, b, c kenarlar; A, B, C ise **karşılarındaki** açılardır. Büyük kenarın karşısında büyük açı bulunur.

a² = b² + c² − 2·b·c·cos A

A = 90° ise cos 90° = 0 olur ve formül a² = b² + c²'ye, yani Pisagor teoremine dönüşür. Kosinüs teoremi Pisagor'un her üçgende geçerli genel hâlidir.



İspat fikri: C'den inen yükseklik iki dik üçgenden iki şekilde yazılır.

İspat fikri (sinüs teoremi). AHC dik üçgeninde sin A = h/b ⇒ h = b·sin A. BHC dik üçgeninde sin B = h/a ⇒ h = a·sin B.

İki ifade aynı h'yi verdiğinden b·sin A = a·sin B ⇒ **a / sin A = b / sin B**. Aynı fikir A'dan inen yükseklikle c'yi de ekler.

Doğrulama: 30°-60°-90° üçgeninde (kenarlar 1, √3, 2): 1/sin 30° = 2, √3/sin 60° = 2, 2/sin 90° = 2. Hepsi eşit, 2R = 2.

ORTA **Örnek 9 (Sinüs teoremi). ABC üçgeninde m(B) = 60°, m(C) = 45° ve c = 4√2 cm ise b kenarını ve çevrel çemberin yarıçapı R'yi bul.**

b / sin B = c / sin C ⇒ b / (√3/2) = 4√2 / (√2/2) = 8 ⇒ b = 8·(√3/2) = **4√3 cm**.
2R = c / sin C = 8 ⇒ R = **4 cm**.

KOLAY **Örnek 10 (Kosinüs teoremi). b = 3 cm, c = 8 cm ve m(A) = 60° ise a kaçtır?**

a² = 9 + 64 − 2·3·8·(1/2) = 73 − 24 = 49 ⇒ a = **7 cm**.

ORTA **Örnek 11 (Açı bulma). Kenarları 3 cm, 7 cm ve 8 cm olan üçgende 7 cm'lik kenarın karşısındaki açı kaç derecedir?**

49 = 9 + 64 − 2·3·8·cos θ ⇒ 48·cos θ = 24 ⇒ cos θ = 1/2 ⇒ θ = **60°**.

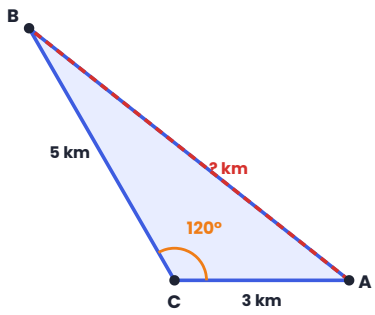
Taktik: Hangi teoremi kullanacağını verilenler söyler. **İki açı + bir kenar** ya da kenar–karşı açı çifti ⇒ sinüs. **İki kenar + aradaki açı** ya da **üç kenar** ⇒ kosinüs. Açının türü için kısa yol: a² > b² + c² ise A geniş, eşitse dik, küçükse dar.

Sık yapılan hata

Kosinüs teoreminde yanlış açıyı kullanmak. Eşitliğin solunda hangi kenar varsa cos'un içindeki açı **o kenarın karşısındaki** açıdır. Açı genişse cos negatif olur ve −2bc·cos A terimi **artıya** döner.

Derinleşelim: Geniş açılar, iki çözüm ihtimali ve açının türü

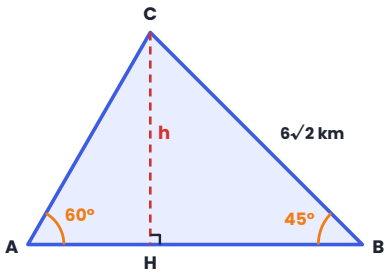
- **Geniş açının sinüsü ve kosinüsü:** Teoremler geniş açılı üçgende de geçerlidir. Bunun için $\sin(180^\circ - x) = \sin x$ ve $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$ kullanılır: $\sin 120^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 120^\circ = -1/2$, $\sin 135^\circ = \sqrt{2}/2$, $\cos 150^\circ = -\sqrt{3}/2$.
- **Sinüsle açı bulurken dikkat:** $\sin B = \sqrt{3}/2$ ise $B = 60^\circ$ ya da $B = 120^\circ$ olabilir. İki kontrol yap: (1) $A + B < 180^\circ$ olmalı, (2) büyük kenarın karşısında büyük açı olmalı. Kosinüs bu belirsizliği yaşatmaz: cos negatifse açı geniştir.
- **Açının türü (hesapsız):** a^2'yi $b^2 + c^2$ ile karşılaştır. Bu, kosinüs teoremindeki $\cos A$'nın işaretinden gelir: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$.



A ile B arasında orman var; uzaklık C'den ölçülen iki yol ve aradaki açıyla bulunur.

ZOR **Örnek 11a (Oryantiring). Bir oryantiring yarışmasında sporcu C kontrol noktasından A'ya 3 km, C'den B'ye 5 km uzaklıkta. Haritada $m(ACB) = 120^\circ$. A ile B arasındaki kuş uçuşu uzaklık kaç km'dir?**

Bilinen iki kenarın arasındaki açı verilmiş ⇒ kosinüs teoremi:
$|AB|^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cdot\cos 120^\circ = 9 + 25 - 30\cdot(-1/2) = 34 + 15 = 49 \Rightarrow |AB| = \mathbf{7\ km}$.



Yelken parkuru: C şamandırasından AB hattına inen dikme h, iki dik üçgeni ayırır.

ZOR **Örnek 11b (Yelken yarışı). Bir yelken yarışının parkuru A, B, C şamandıralarından oluşan bir üçgendir. $m(CAB) = 60^\circ$, $m(ABC) = 45^\circ$ ve $|BC| = 6\sqrt{2}$ km. a) $|AC|$ kaç km'dir? b) C şamandırasının AB hattına uzaklığı (h) kaç km'dir? c) $|AB|$ kaç km'dir?**

a) Sinüs teoremi: $|AC| / \sin 45^\circ = |BC| / \sin 60^\circ \Rightarrow |AC| = 6\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}/2) / (\sqrt{3}/2) = 6/(\sqrt{3}/2) = 12/\sqrt{3} = \mathbf{4\sqrt{3}\ km}$.
b) BCH dik üçgeninde $h = |BC|\cdot\sin 45^\circ = 6\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}/2) = \mathbf{6\ km}$. (Kontrol: ACH'de $h = 4\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ = 6$.)
c) $|BH| = h = 6$ (45°), $|AH| = h / \tan 60^\circ = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow |AB| = \mathbf{6 + 2\sqrt{3}\ km}$.

ZOR **Örnek 11c (İki olasılık). ABC üçgeninde $m(A) = 45^\circ$, $a = 2\sqrt{3}$ cm ve $b = 3\sqrt{2}$ cm'dir. B açısının alabileceği değerleri ve her durumda C açısını bul.**

Sinüs teoremi: $2\sqrt{3} / \sin 45^\circ = 3\sqrt{2} / \sin B \Rightarrow \sin B = 3\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}/2) / (2\sqrt{3}) = 3/(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}/2 \Rightarrow B = 60^\circ$ **veya** $B = 120^\circ$.
Kontrol: $b \approx 4{,}24 > a \approx 3{,}46$ olduğundan $B > A = 45^\circ$ olmalı; ikisi de uygun. $45^\circ + 120^\circ = 165^\circ < 180^\circ \Rightarrow$ ikinci üçgen de var.
$B = 60^\circ$ ise $\mathbf{C = 75^\circ}$; $B = 120^\circ$ ise $\mathbf{C = 15^\circ}$. Bu verilerle iki farklı üçgen çizilebilir.

Tuzak

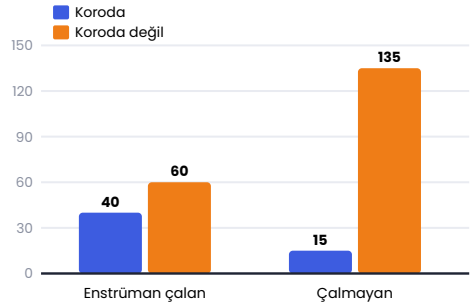
- İşlem önceliği: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$'da önce $2bc\cdot\cos A$ hesaplanır, sonra çıkarılır. $(b^2 + c^2 - 2bc)\cdot\cos A$ yazmak çok yaygın bir hatadır.
- $\cos 120^\circ$'yi $1/2$ almak. Geniş açının kosinüsü negatiftir: $\cos 120^\circ = -1/2$, bu yüzden $-2bc\cdot\cos 120^\circ$ terimi $+bc$ olur.
- $\sin B = \sqrt{3}/2$ bulunca yalnızca 60° yazıp 120° ihtimalini kontrol etmemek.

5. İki Kategorik Değişkenli Veriler

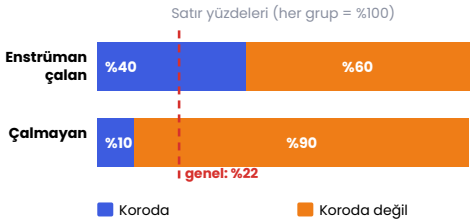
10.2.1 · Çapraz tablo, satır/sütun yüzdeleri, ilişkililik (Senaryo 1–3)

Kategorik değişken, sayı değil grup ya da etiket alan değişkendir (evet/hayır, şube, tercih edilen tür gibi). İki kategorik değişken birlikte incelenirken veriler **iki yönlü (çapraz) tabloda** özetlenir. Örnek: Bir lisede 250 öğrenciye "Bir enstrüman çalıyor musun?" ve "Okul korosunda mısın?" diye sorulmuş.

	Koroda	Koroda değil	Toplam
Enstrüman çalan	40	60	**100**
Çalmayan	15	135	**150**
Toplam	**55**	**195**	**250**



Gruplanmış sütun grafiği (sayılar). Gruplar farklı büyüklükte olduğundan yalnızca sayılara bakıp karar verilmez.



%100 yığılmış çubuk: koroya katılma oranı enstrüman çalanlarda 4 kat daha yüksek ⇒ iki değişken arasında ilişki var.

Soru	Hesap	Cevap
Enstrüman çalanların yüzde kaçı koroda? (satır yüzdesi)	40 / 100	%40
Çalmayanların yüzde kaçı koroda? (satır yüzdesi)	15 / 150	%10
Koro üyelerinin yüzde kaçı enstrüman çalıyor? (sütun yüzdesi)	40 / 55	yaklaşık %72,7

İlişkililik yorumu: Gruplardaki oranlar birbirine yakınsa değişkenler arasında ilişki yoktur denir; belirgin biçimde farklıysa ilişki vardır. Burada %40 ile %10 çok farklı ⇒ enstrüman çalmak ile koroda olmak arasında **ilişki var**. Ama bu, enstrüman çalmanın koroya katılmaya **neden olduğunu** göstermez; ikisini birden etkileyen başka bir durum (ör. müziğe genel ilgi) olabilir.

Taktik: Grup büyüklükleri farklıysa sayıları değil **yüzdeleri** karşılaştır. Soru cümlesinde "...ların yüzde kaçı" diye geçen grup, paydaya yazacağın toplamdır: "Koro üyelerinin yüzde kaçı" ⇒ payda 55.

Sık yapılan hatalar

- Satır yüzdesiyle sütun yüzdesini karıştırmak: "Çalanların %40'ı koroda" ile "Koro üyelerinin %72,7'si çalıyor" farklı cümlelerdir.
- İlişki gördüğünde neden-sonuç ilişkisi varmış gibi yorum yazmak.

Derinleşelim: İlişki olmasaydı tablo nasıl görünürdü?

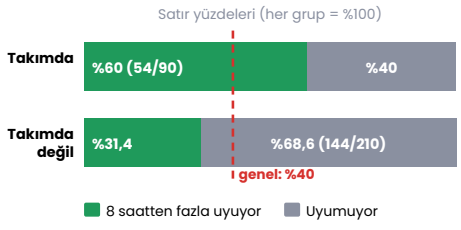
- **"İlişki yok" ne demek?** Bir değişkenin bütün gruplarında diğer değişkenin oranı aynıysa. Koro örneğinde 250 öğrencinin 55'i (%22) koroda. İlişki olmasaydı çalan 100 kişinin de %22'si, yani 100·55/250 = 22 kişi; çalmayan 150 kişinin %22'si, yani 33 kişi koroda olurdu. Gerçekte 40 ve 15. Gözlenen değerler beklenenden çok uzak ⇒ ilişki var.
- **Genel kural:** İlişki yoksa bir hücrede beklenen sayı = (satır toplamı × sütun toplamı) / genel toplam.
- **Üç farklı yüzde:** genel yüzde (payda: genel toplam), satır yüzdesi (payda: satır toplamı), sütun yüzdesi (payda: sütun toplamı).
- **Grafik seçimi:** Gruplanmış sütun grafiği sayıları, %100 yığılmış grafik oranları karşılaştırır. Grup büyüklükleri farklıysa ilişkiyi ikincisinde gör.

KOLAY **Örnek 12 (Genel yüzde). Koro tablosuna göre öğrencilerin yüzde kaçı hem enstrüman çalmıyor hem de koroda değil?**

Payda genel toplam: 135 / 250 = **%54**. (Bunu satır yüzdesi 135/150 = %90 ile karıştırma.)

ORTA **Örnek 13 (Bir yorumu değerlendirme). Satranç kulübüne üye 30 öğrenciden 12'si, üye olmayan 90 öğrenciden 36'sı okul turnuvasına katılmış. Bir öğrenci "Turnuvaya katılan üye olmayanlar 36 kişi, üyeler sadece 12; demek ki kulübe üye olmamak katılımı artırıyor." diyor. Bu yorumu değerlendir.**

Yorum **hatalı**: Grup büyüklükleri çok farklı (30 ve 90), sayılar değil satır yüzdeleri karşılaştırılmalı. Üyelerde katılım 12/30 = %40, üye olmayanlarda 36/90 = %40. Oranlar **eşit** ⇒ bu veride kulüp üyeliği ile turnuvaya katılma arasında **ilişki yoktur**. 36'nın 12'den büyük olması yalnızca üye olmayan grubun 3 kat kalabalık olmasından kaynaklanır.



Kesikli çizgi bütün öğrencilerdeki oran (120/300 = %40). İlişki olmasaydı iki çubuk da bu çizgide bölünürdü.

	8+ saat uyuyor	Uyumuyor	Toplam
Takımda	54	36	90
Takımda değil	66	144	210
Toplam	120	180	300

Örnek 14'ün tamamlanmış tablosu

ZOR **Örnek 14 (Eksik tablo). 300 öğrencilik bir ankette öğrencilerin %30'u bir okul spor takımında oynuyor. Takımda oynayanların %60'ı günde 8 saatten fazla uyuyor. 8 saatten fazla uyuyan toplam 120 öğrenci var. a) Çapraz tabloyu tamamla. b) Takımda olmak ile uyku süresi arasındaki ilişkiyi yüzdelerle yorumla. c) 8 saatten fazla uyuyanların yüzde kaçı takımda? d) İlişki olmasaydı takımdakilerden kaçının 8 saatten fazla uyuması beklenirdi?**

a) Takımda: 300·0,30 = 90; bunların 90·0,60 = 54'ü uyuyor, 36'sı uyumuyor. Takımda değil: 210; uyuyan 120 - 54 = 66, uyumayan 144.
b) Satır yüzdeleri: takımda %60, takımda olmayanlarda 66/210 ≈ %31,4. Belirgin fark ⇒ **ilişki var** (neden-sonuç kanıtı değil).
c) Sütun yüzdesi: 54/120 = **%45**.
d) Beklenen = 90·120/300 = **36 kişi**. Gözlenen 54, beklenenden çok fazla; bu da ilişkiyi destekler.

Tuzak

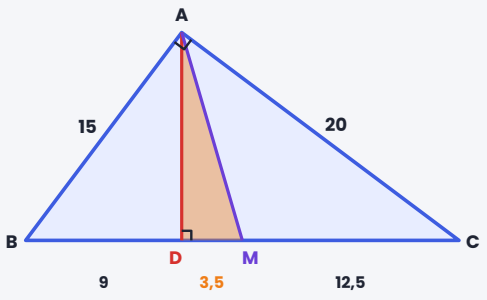
- Payda karışıklığı: "takımdakilerin yüzde kaçı" ⇒ 90; "8 saatten fazla uyuyanların yüzde kaçı" ⇒ 120; "öğrencilerin yüzde kaçı hem … hem …" ⇒ 300.
- Yüzdesi verilen grubu yanlış seçmek: "Takımda oynayanların %60'ı" bilgisi 90 kişilik satır içindir; 300'ün %60'ı değildir.
- Örnek 13'teki gibi oranlar eşitken sayılar farklı diye "ilişki var" demek. Karar her zaman oranlarla verilir.

90+ Atölyesi

Kazanımları birleştiren zor sorular. Önce kendin dene, sonra çözüme bak.

ZOR **Atölye 1 (Trigonometri + yükseklik + kenarortay). ABC üçgeninde m(A) = 90°, |AB| = 15 cm, |AC| = 20 cm; [AD] yükseklik, [AM] kenarortaydır (D, M ∈ [BC]). a) sin B ve |AD| kaçtır? b) |BD| ve |DM| kaçtır? c) tan(DAM) değerini bul.**

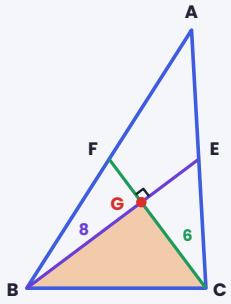
a) |BC| = √(225 + 400) = 25. sin B = |AC|/|BC| = **4/5**. Alanı iki yoldan yaz: 15·20/2 = 25·|AD|/2 ⇒ |AD| = **12 cm**.
b) ABD dik üçgeninde |BD| = √(15² - 12²) = √81 = **9 cm**. Kenarortay hipotenüsün yarısı: |BM| = 12,5 ⇒ |DM| = 12,5 - 9 = **3,5 cm**.
c) ADM, D'de dik: tan(DAM) = |DM|/|AD| = 3,5/12 = **7/24**. (Kontrol: |AM| = √(12² + 3,5²) = 12,5 ✓)



Puan kaybettiren nokta: Yükseklik ile kenarortayı aynı noktaya inmiş sanıp |DM| = 0 almak ya da |BD|'yi kenarortaydan hesaplamak. İkisi ayrı doğrulardır; önce D'yi, sonra M'yi ayrı ayrı bul.

ZOR **Atölye 2 (Ağırlık merkezi + dik kesişme + alan). ABC üçgeninde [BE] ve [CF] kenarortaylar G noktasında dik kesişiyor. |BG| = 8 cm ve |CG| = 6 cm ise a) |BC| b) A(ABC) c) A(GEC) değerlerini bul.**

a) BGC, G'de dik: |BC| = √(64 + 36) = **10 cm**.
b) A(BGC) = 8·6/2 = 24. BGC, altı eş parçanın ikisidir ⇒ A(ABC) = 3·24 = **72 cm²**.
c) G, [BE]'yi 2 : 1 böler ⇒ |GE| = 4. GEC de G'de dik: A(GEC) = 4·6/2 = **12 cm²**. Kontrol: 72/6 = 12 ✓



Puan kaybettiren nokta: A(ABC)'yi 2·A(BGC) sanmak. BGC üçgeni toplam alanın 1/2'si değil, 1/3'üdür (6 parçanın 2'si).

ZOR **Atölye 3 (Kosinüs + alan + sinüs). Okul konserinde sahnedeki iki hoparlör B ve C, mikser masası A noktasında. |AB| = 6 m, |AC| = 10 m ve m(BAC) = 120°. a) Hoparlörler arası uzaklık |BC| b) ABC üçgeninin alanı c) A'nın BC doğrusuna uzaklığı d) çevrel çemberin yarıçapı ve sin B kaçtır?**

a) |BC|² = 36 + 100 - 2·6·10·cos 120° = 136 + 60 = 196 ⇒ |BC| = **14 m**.
b) Alan = ½·6·10·sin 120° = 30·(√3/2) = **15√3 m²**. c) 14·h/2 = 15√3 ⇒ h = **15√3/7 m**.
d) 2R = 14 / sin 120° = 28/√3 ⇒ R = **14√3/3 m**. sin B = |AC|·sin A / |BC| = 10·(√3/2)/14 = **5√3/14**.

Puan kaybettiren nokta: cos 120° = -1/2 olduğunu unutup |BC|² = 136 - 60 = 76 bulmak. Geniş açıda -2bc·cos A terimi eklenir.

ZOR **Atölye 4 (Kosinüs teoremiyle denklem). ABC üçgeninde m(A) = 120°, a = 19 cm ve b = 5 cm'dir. a) c kenarını b) üçgenin alanını c) çevrel çemberin yarıçapını d) sin B değerini bulunuz.**

a) 19² = 5² + c² - 2·5·c·cos 120° ⇒ 361 = 25 + c² + 5c ⇒ c² + 5c - 336 = 0 ⇒ (c + 21)(c - 16) = 0 ⇒ c = **16 cm** (uzunluk pozitif).
b) Alan = ½·5·16·sin 120° = 40·(√3/2) = **20√3 cm²**. c) 2R = 19 / sin 120° = 38/√3 ⇒ R = **19√3/3 cm**.
d) Sinüs teoremi: sin B = b·sin A / a = 5·(√3/2)/19 = **5√3/38**. (B dar açıdır, çünkü üçgende yalnızca bir geniş açı olabilir.)

Puan kaybettiren nokta: cos 120°'nin işaretini kaçırıp c² - 5c - 336 = 0 yazmak: bu denklem c = 21 gibi yanlış ama "temiz" görünen bir sonuç verir. Ayrıca c = -21 kökünü elemeyi unutma.

ZOR **Atölye 5 (Alan değişimi + denklem). Bir okul takımının üçgen biçimli flamasında taban %50 artırılıp yükseklik 2 cm azaltılırsa alan değişmiyor. Yükseklik 3 cm artırılırsa (taban aynı) alan 15 cm² artıyor. a) Taban, yükseklik ve alan kaçtır? b) Taban %20 azaltılıp yükseklik %50 artırılırsa yeni alan kaç cm² olur? Alan yüzde kaç değişir?**

a) Taban b, yükseklik h. İkinci bilgi: b·(h + 3)/2 - b·h/2 = 3b/2 = 15 ⇒ **b = 10 cm**. Birinci bilgi: 1,5b·(h - 2)/2 = b·h/2 ⇒ 1,5h - 3 = h ⇒ **h = 6 cm**. Alan = 10·6/2 = **30 cm²**.
b) Çarpan 0,8·1,5 = 1,2 ⇒ yeni alan **36 cm²**, alan **%20 artar**.

Puan kaybettiren nokta: İlk bilgiden b'yi bulmaya çalışmak: o denklemde b sadeleşir ve yalnızca h bulunur. Hangi bilginin hangi bilinmeyeni verdiğini gör.

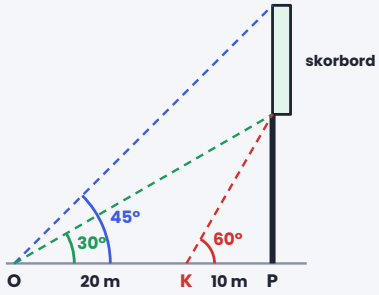
ZOR **Atölye 6 (Kategorik veri, ilişkisizlik koşulu). Bir okul kütüphanesinin ekim ayı kayıtlarına göre 80 dokuzuncu sınıf ve 120 onuncu sınıf öğrencisinden toplam 90 kişi kitap ödünç almış. a) Sınıf düzeyi ile kitap alma arasında hiç ilişki olmasaydı her düzeyden kaç kişi kitap alırdı? b) Gerçekte 9. sınıflardan 44 kişi kitap almış. Tabloyu tamamlayıp ilişkiyi yorumlayınız. c) Kitap alanların yüzde kaçı 10. sınıftır?**

a) İlişki yoksa iki düzeyde oran aynıdır: 90/200 = %45 ⇒ 9. sınıf 80·0,45 = **36**, 10. sınıf 120·0,45 = **54** kişi.
b) 10. sınıftan alan 90 - 44 = 46. Satır yüzdeleri: 9. sınıf 44/80 = %55, 10. sınıf 46/120 ≈ %38,3. Oranlar belirgin şekilde farklı ⇒ **ilişki var**: 9. sınıflar daha çok kitap alıyor (bu bir neden-sonuç kanıtı değildir).
c) Sütun yüzdesi: 46/90 ≈ **%51,1**.

Puan kaybettiren nokta: c şıkkındaki %51,1'e bakıp "yarı yarıya, ilişki yok" demek. Kitap alanların çoğunun 10. sınıf olması, o düzeyin daha kalabalık olmasından gelir; karar satır yüzdeleriyle verilir.

ZOR **Atölye 7 (Yükseklik ölçme). Stadyumdaki bir skorbord, düz zemine dik bir direğin üzerinde duruyor. Direkten 30 m uzaktaki O noktasından skorbordun alt kenarı 30°, üst kenarı 45°'lik açıyla görülüyor (göz yüksekliğini ihmal et). a) Skorbordun boyu kaç m'dir? (√3 ≈ 1,732) b) Gözlemci direğe doğru yürüyüp alt kenarı 60°'lik açıyla gördüğü K noktasına geliyor. Kaç m yürümüştür?**

a) Üst kenar: 30·tan 45° = 30 m. Alt kenar: 30·tan 30° = 30·(√3/3) = 10√3 m. Skorbord boyu = **30 − 10√3 ≈ 12,68 m**.
b) K'nin direğe uzaklığı x: tan 60° = 10√3 / x ⇒ x = 10√3/√3 = 10 m. Yürünen yol = 30 − 10 = **20 m**.
(Kontrol: OLK üçgeninde m(OLK) = 60° − 30° = 30° = m(LOK) ⇒ ikizkenar, |KL| = |OK| = 20 m; |KL| = 10/cos 60° = 20 ✓)



Puan kaybettiren nokta: Skorbordun boyunu tan 45° − tan 30° gibi açıların farkından tek oranla bulmaya çalışmak. Önce iki yüksekliği ayrı ayrı hesapla, sonra çıkar.

Prova 1 – Temel

40 dakika · 7 açık uçlu soru · 100 puan. Önce kendin çöz, sonra cevap anahtarına bak.

Soru 1 (15 puan). ABC dik üçgeninde m(C) = 90°, |AC| = 12 cm ve |BC| = 9 cm'dir. sin B, cos B, tan B ve cot B değerlerini bulunuz.

Soru 2 (15 puan). sin 25° / cos 65° + tan 40° · tan 50° − 4·sin²45° ifadesinin değerini, kullandığınız özdeşlikleri belirterek bulunuz.

Soru 3 (15 puan). ABC üçgeninde [AD] iç açıortaydır (D ∈ [BC]). |AB| = 9 cm, |AC| = 6 cm ve |BC| = 10 cm ise |BD| ve |DC| uzunluklarını bulunuz.

Soru 4 (10 puan). a) ABC üçgeninde [AD] kenarortay, G ağırlık merkezi ve |GD| = 7 cm ise |AD| ve |AG| kaç cm'dir? b) Dik kenarları 16 cm ve 30 cm olan dik üçgende hipotenüse ait kenarortay kaç cm'dir?

Soru 5 (15 puan). a) Bir üçgenin tabanı 3 katına çıkarılıp bu tabana ait yüksekliği %40 azaltılıyor. Alan nasıl değişir? Gerekçesiyle açıklayınız. b) Tabanı sabit kalan bir üçgenin yüksekliği 2 katına çıkarılırsa alanı nasıl değişir? Alan ile yükseklik arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

Soru 6 (15 puan). a) ABC üçgeninde b = 4 cm, c = 6 cm ve m(A) = 120° ise a kenarını bulunuz. b) Bir üçgende m(C) = 45° ve c = 6 cm ise çevrel çemberin yarıçapını bulunuz.

Soru 7 (15 puan). Okul müzik kulübü 120 öğrenciye "Ders çalışırken müzik dinler misin?" ve "Son denemede puanın arttı mı?" diye sormuş: Müzik dinleyen 50 öğrenciden 20'sinin, dinlemeyen 70 öğrenciden 42'sinin puanı artmış. a) Çapraz tabloyu oluşturunuz. b) Her grup için puanı artanların yüzdesini bulunuz ve iki değişkenin ilişkisini yorumlayınız. c) Puanı artanların yüzde kaçı ders çalışırken müzik dinliyor?

Prova 1 – Cevap Anahtarı ve Puanlama

Soru 1. |AB| = √(12² + 9²) = √225 = 15 cm **(5 p)**. sin B = 12/15 = 4/5 **(2,5 p)**, cos B = 9/15 = 3/5 **(2,5 p)**, tan B = 12/9 = 4/3 **(2,5 p)**, cot B = 3/4 **(2,5 p)**

Soru 2. cos 65° = sin 25° (tümler) ⇒ sin 25°/cos 65° = 1 **(5 p)**; tan 50° = cot 40° ⇒ tan 40°·cot 40° = 1 **(5 p)**; 4·sin²45° = 4·(√2/2)² = 2 **(3 p)**. Sonuç: 1 + 1 - 2 = **0** **(2 p)**

Soru 3. |BD|/|DC| = |AB|/|AC| = 9/6 = 3/2 **(7 p)**; 10 cm = 5 parça ⇒ 1 parça 2 cm ⇒ |BD| = 6 cm, |DC| = 4 cm **(8 p)**

Soru 4. a) |GD| = k = 7 ⇒ |AD| = 3k = 21 cm, |AG| = 2k = 14 cm **(5 p)** b) Hipotenüs = √(256 + 900) = 34 ⇒ kenarortay 34/2 = 17 cm **(5 p)**

Soru 5. a) Yeni alan = (3·taban)·(0,6·yükseklik)/2 = 1,8·eski alan ⇒ alan %80 artar; çarpanlar çarpılır **(9 p)**
b) A(h) = (taban/2)·h doğrusaldır; alan yükseklikle doğru orantılı olduğundan 2 katına çıkar **(6 p)**

Soru 6. a) a² = 16 + 36 - 2·4·6·cos 120° = 52 + 24 = 76 ⇒ a = √76 = 2√19 cm **(9 p)** b) 2R = c / sin C = 6/(√2/2) = 6√2 ⇒ R = 3√2 cm **(6 p)**

Soru 7. a) Tablo: Dinleyen 20 arttı / 30 artmadı (50); dinlemeyen 42 / 28 (70); toplam 62 / 58 (120) **(5 p)**
b) Dinleyenlerde 20/50 = %40, dinlemeyenlerde 42/70 = %60. Oranlar belirgin şekilde farklı ⇒ ilişki var; ancak bu bir neden-sonuç kanıtı değildir **(6 p)**
c) 20/62 ≈ %32,3 (sütun yüzdesi) **(4 p)**

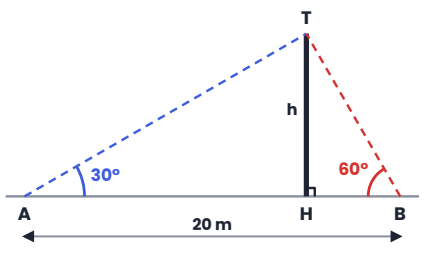
Toplam: 15 + 15 + 15 + 10 + 15 + 15 + 15 = 100 puan.

Prova 2 – 90+ Zorluk

40 dakika · 6 açık uçlu soru · 100 puan. Her adımı yazarak çöz.

Soru 1 (15 puan). x dar açı ve cot x = 3'tür. a) sin x ve cos x değerlerini paydası rasyonel olacak şekilde bulunuz. b) (2 sin x + cos x) / (sin x - cos x) ifadesinin değerini bulunuz. c) sin²x - cos²x kaçtır?

Soru 2 (15 puan). Bir spor salonunun ortasındaki bayrak direğinin tepesi T, direğin iki yanında duran ve aralarında 20 m bulunan A ve B oyuncularından sırasıyla 30° ve 60°'lik açılarla görülüyor (A, H, B aynı doğru üzerinde; H direğin dibi). Direğin boyunu en sade biçimde bulup yaklaşık değerini yazınız ve |BT| uzaklığını hesaplayınız. (√3 ≈ 1,732)



Soru 3 (15 puan). ABC üçgeninde |AB| = 10 cm, |AC| = 15 cm, [AD] iç açıortay (D ∈ [BC]) ve A(ABC) = 60 cm²'dir. a) A(ABD) ve A(ADC)'yi bulunuz. b) D noktasının [AB] ve [AC] kenarlarına uzaklığını bulunuz. c) G ağırlık merkezi ise A(GBC) kaç cm²'dir?

Soru 4 (15 puan). a) Bir üçgenin tabanı %40 artırılıp yüksekliği %40 azaltılırsa alanı nasıl değişir? Gerekçelendiriniz. b) Taban %25 azaltılırsa alanın değişmemesi için yükseklik yüzde kaç artırılmalıdır? c) Tabanı 8 m olan üçgen biçimli bir oyun alanının alanını yüksekliğin fonksiyonu olarak yazınız. Alan 36 m² ise yükseklik kaçtır? Yükseklik 1 m artınca alan ne kadar artar, bu artış başlangıç yüksekliğine bağlı mıdır?

Soru 5 (20 puan). ABC üçgeninde |AB| = 8 cm, |AC| = 15 cm ve |BC| = 13 cm'dir. a) m(A)'yı bulunuz. b) Üçgenin alanını bulunuz. c) Çevrel çemberin yarıçapını bulunuz. d) [BC] kenarına ait yüksekliği bulunuz.

Soru 6 (20 puan). 160 öğrencilik bir okulda 64 öğrenci günde 2 saatten fazla bilgisayar oyunu oynuyor. Kütüphanenin okuma etkinliğine toplam 72 öğrenci katılmış. Günde 2 saatten fazla oynamayanların %50'si etkinliğe katılmış. a) Çapraz tabloyu oluşturunuz. b) Her grupta etkinliğe katılanların yüzdesini bulunuz. c) Etkinliğe katılanların yüzde kaçı günde 2 saatten fazla oyun oynuyor? d) Bir öğrenci "Katılanların sadece %33'ü çok oynuyor, %67'si oynamıyor; demek ki çok oyun oynamak katılımı yarı yarıya düşürüyor." diyor. Bu yorumu değerlendiriniz.

Prova 2 – Cevap Anahtarı ve Puanlama

Soru 1. a) Komşu 3, karşı 1 olan dik üçgen: hipotenüs = √10 **(2 p)** ⇒ sin x = 1/√10 = √10/10, cos x = 3/√10 = 3√10/10 **(4 p)** b) Pay ve paydayı sin x'e böl: (2 + cot x)/(1 - cot x) = 5/(-2) = -5/2 **(5 p)** c) 1/10 - 9/10 = -8/10 = -4/5 **(4 p)**

Soru 2. Direğin boyu h. ATH'de tan 30° = h/|AH| ⇒ |AH| = h√3; BTH'de tan 60° = h/|HB| ⇒ |HB| = h/√3 **(5 p)**. h√3 + h/√3 = 20 ⇒ h·(4/√3) = 20 ⇒ h = 5√3 ≈ 8,66 m **(5 p)**. |BT| = h / sin 60° = 5√3/(√3/2) = 10 m **(5 p)** (Kontrol: m(ATB) = 90°, |AT| = 10√3 ve 300 + 100 = 400 = 20²)

Soru 3. a) Ortak yükseklik ⇒ A(ABD)/A(ADC) = |BD|/|DC| = |AB|/|AC| = 10/15 = 2/3 ⇒ A(ABD) = 24 cm², A(ADC) = 36 cm² **(6 p)** b) Açıortay üzerindeki D, iki kola eşit uzaklıkta (d): ½·10·d = 24 ⇒ d = 4,8 cm (kontrol: ½·15·4,8 = 36) **(5 p)** c) A(GBC) = A(ABC)/3 = 20 cm² **(4 p)**

Soru 4. a) 1,4·0,6 = 0,84 ⇒ alan %16 azalır; yüzdeler eşit olsa da çarpanlar çarpılır **(5 p)** b) 0,75·k = 1 ⇒ k = 4/3 ⇒ yükseklik yaklaşık %33,3 (1/3 oranında) artırılmalı **(5 p)** c) A(h) = 8h/2 = 4h; 4h = 36 ⇒ h = 9 m. Doğrusal olduğu için her 1 m artış alanı 4 m² artırır; başlangıç yüksekliğine bağlı değildir **(5 p)**

Soru 5. a) 13² = 8² + 15² - 2·8·15·cos A ⇒ 169 = 289 - 240·cos A ⇒ cos A = 1/2 ⇒ m(A) = 60° **(6 p)** b) Alan = ½·8·15·sin 60° = 30√3 cm² **(5 p)** c) 2R = 13 / sin 60° = 26/√3 ⇒ R = 13√3/3 cm **(5 p)** d) 13·h/2 = 30√3 ⇒ h = 60√3/13 cm **(4 p)**

Soru 6. a) **(6 p)**

	Katıldı	Katılmadı	Toplam
2 saatten fazla	24	40	64
2 saat ve altı	48	48	96
Toplam	72	88	160

(96·0,50 = 48; 72 - 48 = 24.) b) Çok oynayanlarda 24/64 = %37,5; oynamayanlarda %50 **(4 p)** c) 24/72 ≈ %33,3 (sütun yüzdesi) **(3 p)**
d) Yorum hatalıdır **(2 p)**: %33 ile %67 sütun yüzdeleridir ve çok oynayan grubun küçük olmasından (160'ta 64) etkilenir **(2 p)**. İlişki satır yüzdeleriyle karşılaştırılır: %37,5 ile %50 farklı ⇒ ilişki vardır ama "yarı yarıya düşürme" yoktur; ilişkisiz durumda beklenen 64·72/160 = 28,8 kişi, gözlenen 24 **(2 p)**. Bu veri neden-sonuç ilişkisini tek başına kanıtlamaz **(1 p)**

Toplam: 15 + 15 + 15 + 15 + 20 + 20 = 100 puan.

Son gün kontrol listesi (90+ hedefi)

- [ ] Tek bir oran verildiğinde dik üçgeni çizip diğer üç oranı buluyorum; 30°, 45°, 60° değerlerini iki özel üçgenden okuyorum.
- [ ] sin x - cos x ya da sin x + cos x verilince karesini alıp sin x · cos x'e ulaşıyorum; tümler açılar ve sin² + cos² = 1 ile ifade sadeleştiriyorum.
- [ ] Ağırlık merkezinde 2 : 1 oranını, kenarortayların oluşturduğu 6 eş alanı ve BGC'nin toplam alanın 1/3'ü olduğunu kullanabiliyorum.
- [ ] Açıortay teoreminde parçaları doğru kenarla eşliyor; açıortay ile kenarortay ya da yükseklik arasındaki uzaklığı bulabiliyorum.
- [ ] Ortak yükseklik ⇒ taban oranı kuralını üst üste uygulayabiliyor, yüzde değişimlerini çarpan olarak yazıyorum.
- [ ] Geniş açıda sin(180° - x) = sin x ve cos(180° - x) = -cos x kullanıyor; sinüsle açı bulurken ikinci ihtimali kontrol ediyorum.
- [ ] Kosinüs teoreminde bilinmeyen kenar için ikinci dereceden denklem çıkarsa negatif kökü eliyorum.
- [ ] Gerçek yaşam sorularında (direk, parkur, skorbord) şekli çizip hangi teoremi kullanacağıma karar veriyorum.
- [ ] Çapraz tabloda eksik hücreleri dolduruyor; genel, satır ve sütun yüzdesini ayırt ediyor; "ilişki yok" koşulunu oranlarla kuruyorum.
- [ ] Her cevapta kural, işlem, birim ve gerekçe satırı var.

Başarılar!

Kaynak: MEB ÖDSGM konu soru dağılım tablosu 2026-2027